Matemática II

Roberto José Medeiros Junior

INSTITUTO FEDERAL
PARANÁ
Educação à Distância

Curitiba-PR
2011

Presidência da República Federativa do Brasil

Ministério da Educação

Secretaria de Educação a Distância

Este Caderno foi elaborado pelo Instituto Federal do Paraná para o Sistema Escola Técnica Aberta do Brasil - e-Tec Brasil.

Prof. Irineu Mario Colombo
Reitor

Profª. Mara Chistina Vilas Boas
Chefe de Gabinete

Prof. Ezequiel Westphal
Pró-Reitoria de Ensino - PROENS

Prof. Gilmar José Ferreira dos Santos
Pró-Reitoria de Administração - PROAD

Prof. Paulo Tetuo Yamamoto
Pró-Reitoria de Extensão, Pesquisa e Inovação - PROEPI

Neide Alves
Pró-Reitoria de Gestão de Pessoas e Assuntos Estudantis - PROGEPE

Prof. Carlos Alberto de Ávila
Pró-Reitoria de Planejamento e Desenvolvimento Institucional - PROPLADI

Prof. José Carlos Ciccarino
Diretor Geral de Educação a Distância

Prof. Ricardo Herrera
Diretor de Planejamento e Administração de Educação a Distância

Profª Mércia Freire Rocha Cordeiro Machado
Diretora de Ensino, Pesquisa e Extensão de Educação a Distância

Profª Cristina Maria Ayroza
Coordenadora Pedagógica de Educação a Distância

Prof. Otávio Bezerra Sampaio
Profª. Marisela García Hernández
Profª. Adnilra Selma Moreira da Silva Sandeski
Prof. Helton Pacheco
Coordenadores do Curso

Izabel Regina Bastos
Patricia Machado
Assistência Pedagógica

Profª Ester dos Santos Oliveira
Jaime Machado Valente dos Santos
Profª Linda Abou Rejeili de Marchi
Revisão Editorial

Profª. Rosangela de Oliveira
Análise Didática Metodológica - PROEJA

Flavia Terezinha Vianna da Silva
Goretti Carlos
Diagramação

e-Tec/MEC
Projeto Gráfico

Catalogação na fonte pela Biblioteca do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - Paraná

Apresentação e-Tec Brasil

Prezado estudante,

Bem-vindo ao e-Tec Brasil!

Você faz parte de uma rede nacional pública de ensino, a Escola Técnica Aberta do Brasil, instituída pelo Decreto nº 6.301, de 12 de dezembro 2007, com o objetivo de democratizar o acesso ao ensino técnico público, na modalidade a distância. O programa é resultado de uma parceria entre o Ministério da Educação, por meio das Secretarias de Educação a Distância (SEED) e de Educação Profissional e Tecnológica (SETEC), as universidades e escolas técnicas estaduais e federais.

A educação a distância no nosso país, de dimensões continentais e grande diversidade regional e cultural, longe de distanciar, aproxima as pessoas ao garantir acesso à educação de qualidade, e promover o fortalecimento da formação de jovens moradores de regiões distantes, geograficamente ou economicamente, dos grandes centros.

O e-Tec Brasil leva os cursos técnicos a locais distantes das instituições de ensino e para a periferia das grandes cidades, incentivando os jovens a concluir o ensino médio. Os cursos são ofertados pelas instituições públicas de ensino e o atendimento ao estudante é realizado em escolas-polo integrantes das redes públicas municipais e estaduais.

O Ministério da Educação, as instituições públicas de ensino técnico, seus servidores técnicos e professores acreditam que uma educação profissional qualificada – integradora do ensino médio e educação técnica, – é capaz de promover o cidadão com capacidades para produzir, mas também com autonomia diante das diferentes dimensões da realidade: cultural, social, familiar, esportiva, política e ética.

Nós acreditamos em você!

Desejamos sucesso na sua formação profissional!

Ministério da Educação
Janeiro de 2010

Nosso contato
etecbrasil@mec.gov.br

Indicação de ícones

Os ícones são elementos gráficos utilizados para ampliar as formas de linguagem e facilitar a organização e a leitura hipertextual.

Atenção: indica pontos de maior relevância no texto.

Saiba mais: oferece novas informações que enriquecem o assunto ou "curiosidades" e notícias recentes relacionadas ao tema estudado.

A-Z

Glossário: indica a definição de um termo, palavra ou expressão utilizada no texto.

Mídias integradas: sempre que se desejar que os estudantes desenvolvam atividades empregando diferentes mídias: vídeos, filmes, jornais, ambiente AVEA e outras.

Atividades de aprendizagem: apresenta atividades em diferentes níveis de aprendizagem para que o estudante possa realizá-las e conferir o seu domínio do tema estudado.

Sumário

Palavra do professor-autor

Este material foi elaborado a partir da experiência realizada na educação presencial e a distância, buscando trazer de forma objetiva, simples e prática os principais conteúdos que serão importantes para seu exercício profissional.

Esperamos que através dos conteúdos contemplados neste material didático, somados às aulas expositivas e ao seu esforço pessoal, possamos quebrar, juntos, o paradigma de que a Matemática é uma disciplina "difícil, complicada" e transformá-la em uma disciplina de simples compreensão, útil e aplicável no seu cotidiano profissional.

Muito estudo e consequente sucesso nesta caminhada!

Prof. Roberto José Medeiros Junior

Aula 1 – Conjuntos numéricos: operações

No livro I de Matemática, você conheceu os principais conjuntos numéricos. Nesta primeira aula você irá compreender a importância da notação de união e interseção para os conjuntos numéricos. Conhecerá também o conjunto dos números reais e a representação desses números na reta final.

A teoria dos conjuntos teve importantes contribuições de diversos matemáticos. Inicialmente pelo alemão George Cantor (1845-1918) e aperfeiçoada no início do século XX por outros matemáticos, entre eles, Ernst Zermelo (1871-1956), Adolf Fraenkel (1891-1965), Kurt Gödel (1906-1978), Janos Von Newman (1903-1957), entre outros.

O objetivo deste assunto é tão somente uma introdução elementar à teoria dos conjuntos, base para o desenvolvimento de temas que iremos estudar nas demais aulas, por exemplo, a ideia de relação, funções, análise combinatória, probabilidades, etc.

Retomando a reta real:

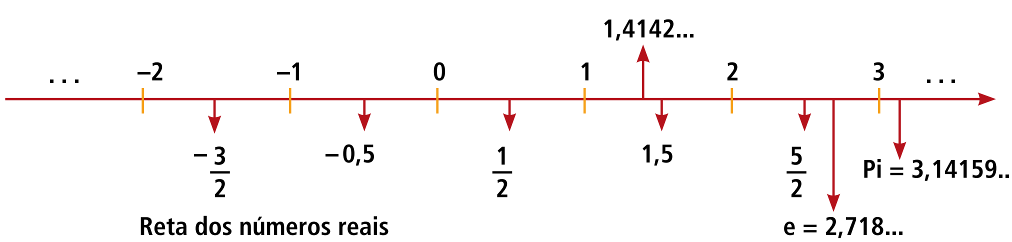


Figura 1.1: Reta numérica real
Fonte: http://portalgemte.com.br

1.1 Conjunto de elementos, universo ou população

Exemplo: conjunto dos números pares maiores que zero:

P = {2, 4, 6, 8, 10, 12, ... }.

1.1.1 Relação de pertinência:

Esta forma de representar um conjunto com a letra maiúscula e entre chaves, enumerando os seus elementos, chama-se listagem. O mesmo conjunto também poderia ser representado por uma propriedade dos seus elementos – uma lei geral – ou seja, sendo x um elemento qualquer do conjunto P (pares positivos), a notação geral ficaria:

$P = \{ x \in R/x$ é par e positivo$\}$

Lê-se: x pertence ao conjunto dos números reais, tal que, x é par e é positivo.

Deste modo, estamos nos referindo a um conjunto infinito de números pares maiores que zero:

P = 2, 4, 6, ...

O zero, apesar de ser par, não pertence ao conjunto P, pois definimos no exemplo como sendo um conjunto maior que zero.

Para o exemplo citado, cabe a seguinte notação:

$0 \notin P$

Lê-se: "zero não pertence ao conjunto p"

Note que a relação de pertinência é exclusiva para quando queremos representar se um dado elemento pertence ou não pertence a um conjunto.

1.1.2 Relação de Inclusão

Usamos uma relação de inclusão quando relacionamos um conjunto (ou subconjunto) com outro conjunto.

Exemplo:

Sendo $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$

Podemos dizer que:

$B \supset A$ (B contém A) ou $A \subset B$ (A está contido em B).

Podemos dizer ainda que $\{3, 4\} \subset B$ (o subconjunto formado pelos elementos 3 e 4 está contido em B).

União e interseção de conjuntos por meio do Diagrama de Venn-Euler (lê-se: "Ven-óiler").

1.2 União de conjuntos

Chamamos **União** de dois conjuntos **A** e **B** o conjunto formado pelos elementos pertencentes a **A** ou **B**.

$A \cup B = \{ x \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B \}$

Importante

Este "ou" da união não é o "ou" de exclusão da linguagem usual "sorvete de morango ou de chocolate". Ele significa: se $x \in A \cup B$, então $x \in A$ ou $x \in B$ ou x pertence a ambos, isto é, $x \in A \cup B$ quando pelo menos uma das afirmações, $x \in A$ ou $x \in B$, é verdadeira.

Exemplo:

Dados os conjuntos:

A = {1, 2, 3, 4}

B = {7, 8, 9}

Resposta:

A união entre os conjuntos A e B é representada como sendo: $\mathbf{A \cup B} = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$

Graficamente, pelo diagrama de Venn:

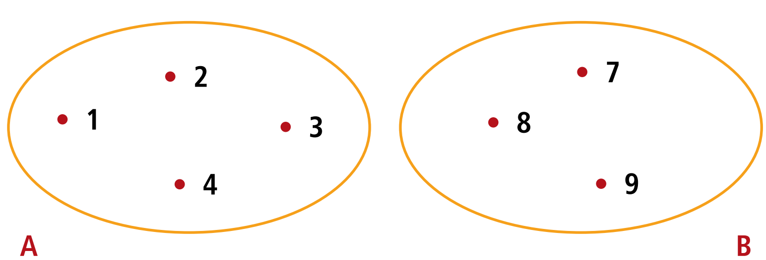


Figura 1.2: Diagrama de Venn
Fonte: http://pt.scribd.com

1.3 Interseção de conjuntos

Chamamos **Interseção** de dois conjuntos **A** e **B** o conjunto formado pelos elementos pertencentes a **A** e **B**.

$A \cap B = \{x / x \in A \text{ e } x \in B\}$

Importante

$x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ quando as duas afirmações $x \in \mathbf{A}$ e $x \in \mathbf{B}$, são simultaneamente verdadeiras.

Se $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing$, então os conjuntos **A** e **B** são chamados disjuntos.

Exemplo:

Dados dois conjuntos **A = {5, 6, 8, 9}** e **B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}**, a interseção dos conjuntos será o elemento comum aos dois conjuntos A e B: $A \cap B = \{5\}$, dizemos que A "inter" B é igual a 5.

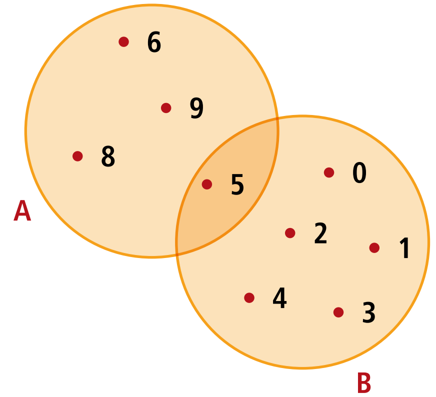


Figura 1.3: Diagrama de Venn Euler – Interseção de conjuntos
Fonte: www.brasilescola.com

Curiosidade

Acompanhem a definição de uma blogueira para os termos união, interseção e diferença:

União, interseção ou diferença?

- **União**: todos os elementos dos conjuntos relacionados.
- **Interseção**: elementos que fazem parte da interseção são os elementos comuns aos conjuntos relacionados.

- **Diferença**: conjunto formado pelos elementos que pertencem a um grupo e a outro não.

A gente acha que essas operações matemáticas só servem quando estamos no colegial... Mas tudo na nossa vida tem união, interseção e diferença!

Vou usar como exemplo uma relação entre um homem e uma mulher...

A união matematicamente não existe, pois nem todos os elementos contidos numa mulher, estão contidos num homem!

Mas a interseção sim existe!!! Existe, pois quando um homem e uma mulher estão juntos, sempre há coisas em comum! Pensamentos, vontades, opiniões, gosto musical, gosto para filmes, comida e assim por diante!

A diferença também existe e é o conjunto mais difícil de lidar... É muito complicado conviver com as pessoas e compreender que existem diferenças!

Acho que depois de muito pensar, refletir, cheguei a conclusão que a diferença pode ser mais importante que a interseção (...)"

Fonte: Texto extraído de http://ponto-partida.blogspot.com/2008/08/unio-interseo-ou-diferena.html

Resumo

Nesta aula vimos a notação de conjuntos por meio de representação algébrica e da relação de pertinência e a importância dos mesmos para representar formalmente os elementos dos conjuntos numéricos.

Atividades de aprendizagem

1. Observe a medida da diagonal de um quadrado:

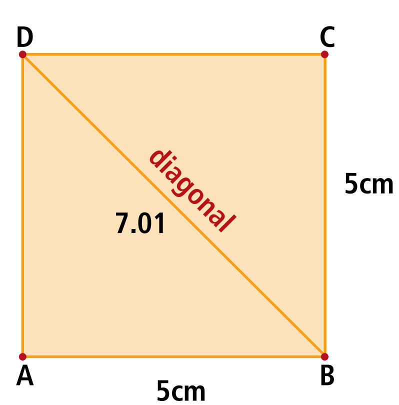


Figura 1.4: Quadrado e diagonal
Fonte: Elaborado pelo DI.

Esta medida foi obtida por meio de um programa de desenho geométrico, ou seja, a medida do segmento BD = 7,01 é bastante precisa e finita.

Agora façamos a mesma análise, porém, utilizando o teorema de Pitágoras para calcular a medida da diagonal:

O quadrado ABCD tem lado 5cm, vamos destacar um dos triângulos, o triângulo ABD:

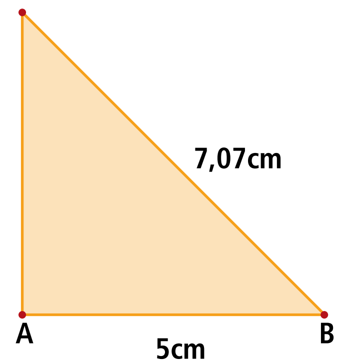


Figura 1.5: Triângulo retângulo
Fonte: Elaborado pelo DI.

Sendo assim, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABD, fica:

$d^2 = 5^2 + 5^2$
$d^2 = 25 + 25$
$d^2 = 50$
$d = \sqrt{50}$
$d = 7{,}0710678118654752440084436210485...$

Um valor com várias, infinitas, casas após a vírgula.

E agora? A diagonal do quadrado é uma medida finita ou infinita?

Dica:
Pesquise sobre a incomensurabilidade e irracionais.

Aula 2 – Conjuntos numéricos: intervalos

Nesta aula conheceremos a representação da reta real por meio da notação de intervalos e o símbolo do infinito.

Na atividade prática da aula um, vimos que segmentos finitos podem ter na representação algébrica medidas representadas por números irracionais, com quantidade infinita de casas após a vírgula. É a chamada incomensurabilidade dos números irracionais.

2.1 Retomando as simbologias de reta, semirreta e segmento

Uma infinidade de pontos determina, quando alinhados, uma reta. Quanto mais pontos, mais "estico" a reta. Como indicação, simbolizamos a reta que passa por dois pontos A e B como sendo: $\overleftrightarrow{AB}$, ou seja, a reta não começou a ser desenhada em A e sim passou por A (teve como ponto de partida outro ponto distinto) e passou por B, não terminando o traçado por B. Sendo um tanto **pragmático**, podemos dizer que a reta não tem começo e nem fim.

A-Z

Pragmático
Pessoa com o hábito de ter suas ações, atos e atitudes frente a vida, baseados na verdade absoluta, na praticidade das soluções, de forma que seja sempre o mais objetivo e simples possível.

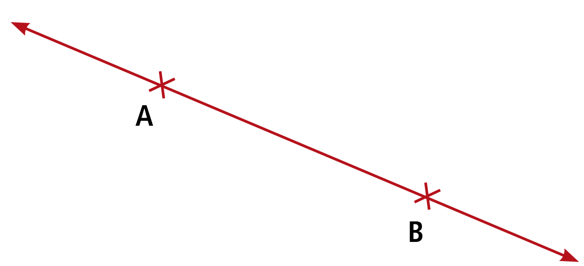


Figura 2.1: Reta
Fonte: Elaborado pelo DI.

Se fixarmos um ponto como início do traçado da reta, sem a preocupação de um fim, teremos uma semirreta. Como indicação, simbolizamos a semirreta que passa por dois pontos A e B como sendo: $\overrightarrow{AB}$, ou seja, a reta começou a ser desenhada em A e passou por B, não terminando o traçado por B. Sendo um tanto pragmático, podemos dizer que a semirreta tem começo, mas não tem fim.

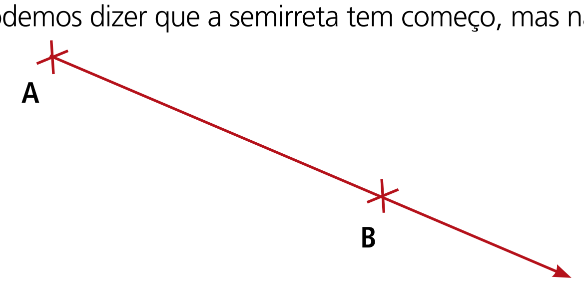


Figura 2.2: Semirreta
Fonte: Elaborado pelo DI

O “esticar”, ou mesmo o fim do traçado pode ser delimitado, seria, então, o comprimento do segmento de reta, ou seja, um pedaço da reta, com começo e fim definidos. Como indicação, simbolizamos o segmento de reta delimitado por dois pontos A e B como sendo: $\overline{AB}$, ou seja, a reta começou a ser desenhada em A e terminou o traçado em B. Podemos dizer que o segmento de reta tem começo e tem fim.

Sendo assim o segmento de reta é **unidimensional**, ou seja, está determinado pelo comprimento.

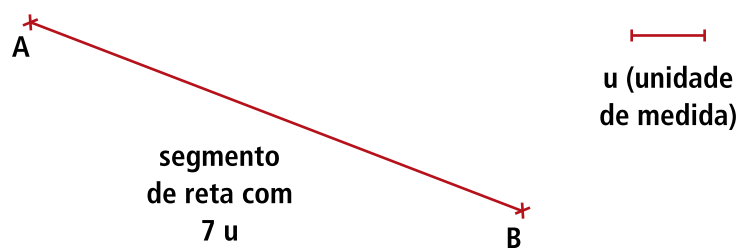


Figura 2.3: Reta
Fonte: Elaborado pelo DI.

2.2 Leitura e representação algébrica de conjuntos:

$a > 0$ (lê-se: "a maior do que zero") $\Leftrightarrow a$ for positivo

$a < 0$ (lê-se: "a menor do que zero") $\Leftrightarrow a$ for negativo

$a < x < b$ (lê-se: " x maior do que a" e "x menor do que b") $\Rightarrow x$ é maior do que a e menor do que b

$a \le x \le b \Rightarrow x$ é maior ou igual que a e menor ou igual que b

2.2.1 Tipos de intervalo e notação

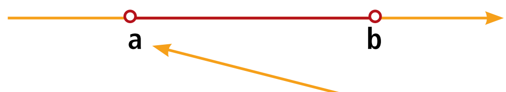
Observe que a representação da reta numérica se dará sempre para o lado direito, pois, para que a reta torne-se orientada, deve-se fixar um sentido de percurso, considerando-se um sentido positivo e outro negativo.

Intervalo fechado: Números reais maiores ou iguais a ‘a’ e menores ou iguais a ‘b’.

Intervalo: [a, b]

Conjunto: {x ∈ R | a ≤ x ≤ b}

Intervalo aberto: Números reais maiores do que a e menores do que b.



"ponto aberto – sem preencher – em a e b"

Intervalo: [a, b]

Conjunto: {x ∈ R | a < x < b}

Intervalo fechado à esquerda: Números reais maiores ou iguais a ‘a’ e menores do que ‘b’.

“fechado – preenchido- em ‘a’ e aberto – não preenchido em ‘b’”

Intervalo: [a, b]

Conjunto: {x ∈ R | a ≤ x < b}

Intervalo fechado à direita: Números reais maiores do que ‘a’ e menores ou iguais a ‘b’.

“aberto – não preenchido em ‘a’ e fechado – preenchido- em ‘b’"

Intervalo: [a, b]

Conjunto: {x ∈ R | a < x ≤ b}

2.2.2 Intervalos ilimitados

Semirreta esquerda, fechada, de origem b: Números reais menores ou iguais a ‘b’.

Intervalo:$[-\infty ,b]$

Conjunto: $\{x \in R \mid x \leq b\}$

Semirreta esquerda, aberta, de origem b: Números reais menores que ‘b’.

Intervalo: $[-\infty ,b]$

Conjunto: $\{x \in R \mid x$

Semirreta direita, fechada, de origem a: Números reais maiores ou iguais a ‘a’.

Intervalo: $[a,+\infty]$

Conjunto: $\{x \in R \mid x \geq a\}$

Semirreta direita, aberta, de origem a: Números reais maiores que ‘a’.

Intervalo: $]a, +\infty [$

Conjunto: $\{x \in R \mid x>a\}$

Reta numérica: Números reais.

Intervalo: $]\infty- ,+\infty[$

Conjunto: R

2.3 União e Interseção de Intervalos

Como intervalos são conjuntos, é natural que as operações de união e interseção sejam realizadas.

E a maneira mais fácil e intuitiva de realizar as operações com conjuntos é através da representação gráfica dos intervalos envolvidos.

Exemplo prático:

Sejam $A = [-1,6]$ que também pode ser representado por $\{x \in R \mid -1 \leq x \leq 6\}$ e $B = (1,+\infty)$ que pode ser representado por $\{x \in R \mid x > 1\}$ dois intervalos distintos. Vamos determinar $A \cup B$ e $A \cap B$ (lê-se A união com B e A interseção com B).

Primeiramente, marcamos todos os pontos que são extremos ou origens dos intervalos em uma mesma reta.

Em seguida, abaixo dessa reta, traçamos os intervalos que representam graficamente os conjuntos A e B (fazendo destaque, pode ser um traço mais forte).

Na **figura 2.4**, que segue, trataremos da solução de $A \cap B$ (A inter B), de onde é também observado o resultado de $A \cup B$ (A união com B):

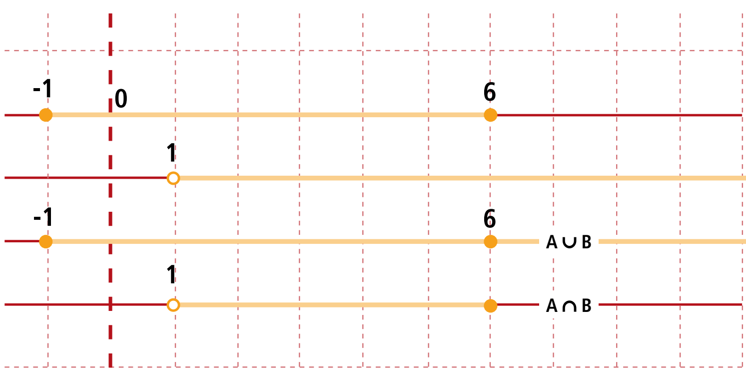


Figura 2.4: solução de $A \cap B$
Fonte: Elaborado pelo DI

$A \cap B = \{x \in R \mid 1 < x \leq 6\}$ e $A \cup B = \{x \in R \mid -1 \leq x\}$

Saiba mais

Em estatística na distribuição de frequências de dados agrupados, utiliza-se o conceito de intervalos de classes aberto e fechado de modo similar:

- ├─┤ Inclui tanto o valor da direita quanto o da esquerda;
- ── Não inclui nem o valor da direita, nem o da esquerda;
- ─┤ Inclui o valor da direita, mas não o da esquerda;
- ├─ Inclui o valor da esquerda, mas não o da direita.

Exemplo:

Tabela de dados tabulados e agrupados por frequência, com intervalos de classes.

Os dados são tabulados e associados à frequência (ou número de vezes) com que aparecem em dada amostragem, cada linha da tabela de distribuição representa um intervalo de classe.

Salário dos Empregados da Empresa X

Salários ($)	Empregados
200 ⊢ 300	2
300 ⊢ 400	3
400 ⊢ 500	13
500 ⊢ 600	11
600 ⊢ 700	9
700 ⊢ 800	2
TOTAL	**40**

Fonte: Dados fictícios.

Nota
O símbolo "⊢" denota intervalo **fechado à esquerda e aberto à direita**.
Na tabela de distribuição do exemplo, o valor **400** e o valor **499,9999** pertencem à **terceira classe**, mas o valor **500** pertence à **quarta classe**.
Na **última classe**, o que não é unanimidade entre os autores, utiliza-se o símbolo "⊢⊣" (fechado a esquerda e a direita), indicando intervalo **fechado nos dois**.

Resumo

Estudamos a noção de intervalo na reta real, utilizando entre outros elementos a representação de classes em uma tabela com dados estatísticos organizados em rol.

Dados 'a' e 'b' números reais, com a ≤ b (lê-se: 'a' menor ou igual a 'b'), x pertencente ao intervalo e 'c' o seu comprimento, podemos classificar os intervalos como:

Quadro resumo dos tipos de intervalos e as respectivas notações:

Intervalo	Notação 1	Notação 2	Notação 3
Fechado de comprimento finito c = b – a	[a,b]	$\{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$	–
Fechado à esquerda e aberto à direita de comprimento finito c = b – a	[a,b[	[a,b)	$\{x \in R \mid a \leq x < b\}$
Aberto à esquerda e fechado à direita de comprimento finito c = b – a	(a,b]	]a,b]	$\{x \in R \mid a < x \leq b\}$
Aberto de comprimento finito c = b – a	]a,b[	(a,b)	$\{x \in R \mid a < x < b\}$
Aberto à direita de comprimento infinito	]-∞,b[	(-∞,b)	$\{x \in R \mid x < b\}$
Fechado à direita de comprimento infinito	]-∞,b]	(-∞,b]	$\{x \in R \mid x \leq b\}$
Fechado à esquerda de comprimento infinito	[a,+∞)	[a,+∞[	$\{x \in R \mid a \leq x\}$
Aberto à esquerda de comprimento infinito	]a,+∞[	(a,+∞)	$\{x \in R \mid x > a\}$
Aberto de comprimento infinito	]-∞,+∞[	(-∞,+∞) = R	–

Fonte: Elaborado pelo autor.

Anotações

Aula 3 – Relações algébricas: razões

Na aula de hoje, revisaremos razões (divisão de grandezas). Nosso objetivo é propiciar maior entendimento e exploração de conceitos matemáticos fundamentais à dedução de relações algébricas (fórmulas) úteis aos cálculos de Matemática na obtenção de leis gerais.

A noção de relação algébrica em matemática é importante para representar de modo geral as relações que estabelecemos entre duas **grandezas** – razão entre ‘a’ e ‘b’, expressa por a/b. De modo geral aplicamos nas relações algébricas entre duas proporções a regra de proporcionalidade: “O produto dos meios é igual ao produto dos extremos”.

A-Z

Grandeza
Qualidade do que é grande. Extensão em altura, comprimento e largura: a grandeza da sala.
Tudo o que pode aumentar ou diminuir: medida de grandeza.
Fonte: http://www.dicio.com.br/grandeza.

Esta regra é bastante útil em matemática (proporcionalidade direta) é frequentemente conhecida como “regra de três”. Sua utilidade vai desde o cálculo de porcentagens até a resolução de problemas com proporção direta e inversa (grandezas direta ou inversamente proporcionais). Primeiramente vamos nos ater a noção de razão e proporção em Matemática.

3.1 Razões

3.1.1 Razão

Existem várias maneiras de comparar duas grandezas. Por exemplo, quando se escreve a > b (lê-se “a” maior do que “b”) ou a < b ou ainda (lê-se “a” menor do que “b”) e a = b (lê-se “a” igual ao “b”), estamos comparando as grandezas **a** e **b.** Essa comparação pode ser feita através de uma razão entre as duas grandezas, isto é, o quociente entre essas grandezas. Em resumo, uma razão é a representação da divisão entre dois valores “a” e “b”.

$$\frac{a}{b} \xrightarrow{\text{é o mesmo que}} a : b \xrightarrow{\text{é o mesmo que}} a/b$$

Exemplo:

A razão entre 6 e 3 é expressa por 6:3 ou 6/3. Se pretendemos comparar a e b determino a razão a : b ou a/b, Mas se dissermos que a razão entre elas é 2, estamos afirmando que “a” é duas vezes maior que “b”, ou seja, o dobro.

3.1.2 Aplicações

Entre as aplicações práticas de razões especiais, as mais comuns, são:

a) Velocidade média

A velocidade média em geral é uma grandeza obtida pela razão entre uma distância percorrida e um tempo gasto neste percurso.

$$\text{Velocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto no percurso}}$$

Exemplo:

Figura 3.1: Estrada
Fonte: www.shutterstock.com

Suponhamos que um carro percorreu 120km em 2 horas. A velocidade média do carro nesse percurso será calculada a partir da razão:

$$V_{\text{média}} = \frac{120\text{km}}{2\text{h}} = 60\text{km/h}$$

O que significa que, em 1 hora o carro percorreu 60km.

b) Escala

Escala é a comparação (através da razão) entre o comprimento observado no desenho (mapa, por exemplo) e o comprimento real correspondente, ambos na mesma unidade de medida.

$$\text{Escala} = \frac{\text{comprimento do desenho}}{\text{comprimento real}}$$

Exemplo:

Em um mapa, um comprimento de 8m está representado por 16cm. Qual a escala usada para fazer esse mapa?

8m = 800cm.

Escala = $\frac{16\text{cm}}{800\text{cm}} = \frac{1}{50}$ ou ainda escala 1:50, como é mais comum nos desenhos e mapas.

Isto significa que cada 1cm medido no desenho é igual 50cm no tamanho no real.

c) Densidade Demográfica

Figura 2.2: Densidade demográfica
Fonte: www.grupoescolar.com

O cálculo da densidade demográfica chamada de população relativa de uma região, também é considerado uma aplicação de razão entre duas grandezas. Ela expressa a relação entre o número de habitantes e a área em uma região.

$$\textbf{Densidade demográfica} = \frac{\textbf{número de habitantes}}{\textbf{área total do território}}$$

Exemplo:

Um município ocupa a área de 100.000km^2. E, de acordo com o censo realizado, tem população aproximada de 5.000 habitantes. A densidade demográfica desse município é obtida assim:

$$\text{Densidade demográfica} = \frac{100.000\text{hab}}{5.000\text{km}^2} = 20\text{hab/km}^2$$

Isto significa que para cada 1 quilômetro quadrado, esse município tem 20 habitantes.

Para o nosso caso mais específico de finanças, um exemplo de razão é relacionar a noção de razão com a transformação de frações em números decimais (com vírgula). Vejamos alguns exemplos:

A razão 20 : 2, ou $^{20}/_{10}$ é igual à 10. A razão de 20 para 2 é 10, ou seja vinte é dez vezes maior do que dois.

A razão 12 : 3 ou $^{12}\!/_{3}$ é igual a quatro, ou seja doze é quatro vezes maior que três.

A razão $\frac{4}{6} : \frac{4}{6}$ é igual a 1. A razão de 4/6 para 4/6 é 1 (um inteiro ou 100%).

A razão facilita o entendimento de alguns problemas, até mesmo financeiros, do dia a dia. É o que veremos a seguir.

Exemplo prático:

A informação de que um produto que queremos comprar aumentou em R$25,00, como sabermos se foi um aumento significativo? Como descobrir se vale à pena comprar naquele momento ou esperar por uma promoção?

Figura 3.3: Preço
Fonte: http://3.bp.blogspot.com

De modo analítico, podemos comparar o valor do aumento com o valor do produto, para analisar a razão do aumento, isto é, o quanto aumentou em relação ao valor inicial.

Se o produto valia R$1.000,00, devemos achar a razão de 25 para 1.000. Esta razão é igual a 0,025, ou 5%. Sabemos que o produto aumentou em 2,5%. Porém se o produto valia R$100,00 teremos a razão de 25 para 100, isto é, o produto aumentou em 25%.

Com este modo de analisar os valores podemos tomar a decisão, financeira, de comprar ou não o produto. Vale ressaltar que, neste caso, não estamos levando em consideração outros fatores que ajudariam na decisão, como os juros, riscos e o chamado custo de oportunidade do capital. Estes fatores serão considerados mais adiante na disciplina.

As situações apresentadas destacam a linguagem mais utilizada nas finanças como um todo: a porcentagem.

Resumo

Nesta aula vimos que as razões são representações fracionárias da proporção direta entre grandezas. Não esqueça que o treino e a resolução dos exercícios contribuem com a habilidade de resolução de problemas matemáticos.

Atividades de aprendizagem

- Pesquise em termos da razão entre duas grandezas, um exemplo prático de:

a) Redução ou aumento do preço de um produto.

b) Densidade de um produto químico.

Anotações

Aula 4 – Relações algébricas: proporção

Na aula de hoje, revisaremos proporcionalidade (regra de três). Nosso objetivo é propiciar maior entendimento e exploração de conceitos matemáticos fundamentais à dedução de relações algébricas (fórmulas) úteis aos cálculos de Matemática na obtenção de leis gerais.

Sempre que utilizarmos a regra de três no intuito de determinar porcentagens, devemos relacionar a parte do todo com o valor de 100%. Alguns exemplos demonstrarão como devemos proceder com a regra de três envolvendo cálculos percentuais.

Obs.: Nas situações envolvendo porcentagens realizamos a propriedade "produtos dos meios é igual ao produto dos extremos", por ser grandeza diretamente proporcional.

Exemplo:

Determine o valor de 95% de R$105,00

%	R$
100	105
95	x

$$\begin{matrix} 100 & \rightarrow & 105 \\ 95 & \rightarrow & x \end{matrix}$$

100 . x = 95 . 105

100 . x = 9.975

$$x = \frac{9.975}{100}$$

x = 99,75 reais

Portanto, 95% de R$105,00 é igual a R$99,75.

4.1 Regra de três direta ou Regra de Três Simples

"Regra de três simples" é um processo prático para resolver problemas que envolvem quatro valores dos quais conhecemos três deles. Devemos, portanto, determinar um valor a partir dos três já conhecidos.

Passos didáticos utilizados para resolver problemas com a regra de três simples

1º Passo: Construir uma tabela, agrupando as grandezas da mesma espécie em colunas e mantendo na mesma linha as grandezas de espécies diferentes em correspondência.

2º Passo: Identificar se as grandezas são direta ou inversamente proporcionais.

3º Passo: Montar a proporção e resolver a equação.

Exemplo:

Em uma sala de 40 alunos realizou-se uma pesquisa, a qual apontou que 30 alunos gostam de pescaria. Qual é a porcentagem de alunos que gostam de pescaria?

%	Alunos
100	40
x	30

100 → **40**
x → **30**

$40 \cdot x = 100 \cdot 30$

$40 \cdot x = 3.000$

$$x = \frac{3.000}{40}$$

$x = 75\%$

Temos que 75% dos alunos dessa classe gostam de pescaria.

4.2 Regra de três inversa

Ao resolver problemas que envolvam grandezas (entendemos por grandeza tudo aquilo que pode ser medido, contado) devemos tomar alguns cuidados em relação à proporcionalidade ser direta ou inversa.

Por exemplo, em uma corrida quanto **maior** for a velocidade, **menor** será o tempo gasto nessa prova. Aqui as grandezas são a velocidade e o tempo e trata-se de grandezas **inversamente proporcionais**.

Importante

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, dobrando uma delas, a outra se reduz para a metade; triplicando uma delas, a outra se reduz para a terça parte. E assim por diante.

Exemplo prático:

Um trem, deslocando-se a uma velocidade média de 400km/h, faz um determinado percurso em 3 horas. Em quanto tempo faria esse mesmo percurso, se a velocidade utilizada fosse de 480km/h?

Solução: montando a tabela:

Velocidade (Km/h)	Tempo (h)
400	3
480	x

Identificação do tipo de relação:

Velocidade (Km/h)	Tempo
400	3 ↓
480	x

Inicialmente colocamos uma seta para baixo na coluna que contém o x (2ª coluna).

Observe que **Aumentando** a velocidade, o tempo do percurso **diminui**. Como as palavras são contrárias (aumentando - diminui), podemos afirmar que as grandezas são **inversamente proporcionais**. Assim sendo, colocamos outra seta no sentido contrário (para cima) na 1ª coluna. *Montando a proporção e resolvendo a equação temos*:

Velocidade (Km/h)	Tempo
400 ↑	3 ↓
480	x

$$\frac{3}{x} = \frac{480}{400}$$

Invertemos os termos

$$480x = 3.400$$

$$x = \frac{3.400}{480} = 2,5$$

Logo, o tempo desse percurso seria de 2,5 horas ou 2 horas e 30 minutos.

Exemplo:

Certo barco percorre uma via de determinada distância com velocidade constante. Sabendo-se que com a velocidade de 25km/h, ele demora 02 horas, quanto tempo este barco gastará para percorrer esta mesma distância com uma velocidade 30km/h.

Maior velocidade menor tempo de percurso, ou seja, grandezas inversamente proporcionais.

Km/h	Tempo
25	X
30	2

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{25} & \rightarrow & \mathbf{X} \\ \mathbf{30} & \rightarrow & \mathbf{2} \end{array}$$

30 . x = 25 . 2

30 . x = 50

$$x = \frac{50}{30}$$

x = 1,67 horas (valor aproximado para duas casas decimais)

Assim: O tempo gasto é de 1,67 horas.

Para saber quantos minutos e segundos precisamos de mais uma "regra de três":

horas	minutos
1	60
1,67	x

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \rightarrow & \mathbf{60} \\ \mathbf{1{,}67} & \rightarrow & \mathbf{x} \end{array}$$

X = 100,2 minutos

Como cada 1 hora tem 60 minutos, 100 minutos terá 1 hora e 40 minutos.

Mas, são 100,2 minutos!

Os demais 0,2 minutos equivalem a $\frac{2}{10}$ de um minuto:

Simplificando a fração $\frac{2}{10}$, fica $\frac{1}{5}$ de 60 segundos (um quinto de um minuto ou um quinto de sessenta segundos).

$$\frac{1}{5} \cdot 60 = \frac{60}{5} = 12 \text{ segundos}$$

Assim: O tempo gasto em horas, minutos e segundos é: 1 hora, 40 minutos e 12 segundos.

Você Sabia?

Tipos de mapas e escalas – orientação espacial

Retirado de: http://educacao.uol.com.br/geografia/ult1701u49.jhtm
Autor: Cláudio Mendonça

O mapa é uma imagem reduzida de uma determinada superfície. Essa redução – feita com o uso da escala – torna possível a manutenção da proporção do espaço representado. É fácil reconhecer um mapa do Brasil, por exemplo, independente do tamanho em que é apresentado, pois obedece à determinada escala, que mantém a sua forma. A escala cartográfica estabelece, portanto, uma relação de proporcionalidade entre as distâncias lineares num desenho (mapa) e as distâncias correspondentes na realidade.

As escalas podem ser indicadas de duas maneiras, através de uma representação gráfica ou de uma representação numérica.

Escala gráfica

A escala gráfica é representada por um pequeno segmento de reta graduado, sobre o qual está estabelecida diretamente a relação entre as distâncias no mapa, indicadas a cada trecho do segmento, e a distância real de um território. Observe:

De acordo com este exemplo cada segmento de 1cm é equivalente a 3km no terreno, 2cm a 6km, e assim sucessivamente. Caso a distância no mapa, entre duas localidades seja de 3,5cm, a distância real entre elas será de 3,5 x 3, ou 10,5km (dez quilômetros e meio). A escala gráfica apresenta a vantagem de estabelecer direta e visualmente a relação de proporção existente entre as distâncias do mapa e do território.

Escala numérica

A escala numérica é estabelecida através de uma relação matemática, normalmente representada por uma razão, por exemplo: 1: 300.000 (1 por 300.000). A primeira informação que ela fornece é a quantidade de vezes em que o espaço representado foi reduzido. Neste exemplo, o mapa é 300.000 vezes menor que o tamanho real da superfície que ele representa.

Na escala numérica as unidades, tanto do numerador como do denominador, são indicadas em cm. O numerador é sempre 1 e indica o valor de 1cm no mapa. O denominador é a unidade variável e indica o valor em cm correspondente no território. No caso da escala exemplificada (1: 300.000), 1cm no mapa representa 300.000cm no terreno, ou 3km. Trata-se, portanto da representação numérica da mesma escala gráfica apresentada anteriormente.

Caso o mapa seja confeccionado na escala 1 : 300, cada 1cm no mapa representa 300cm ou 3m. Para fazer estas transformações é necessário aplicar a escala métrica decimal:

Escala 1 : 300.000					
3	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
Km	hm	dam	m	dm	cm
3km	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø

ou

Escala 1 : 300.000					
			3	**0**	**0**
Km	hm	dam	m	dm	cm
			3m	Ø	Ø

Aplicação da escala

A escala (E) de um mapa é a relação entre a distância no mapa (d) e a distância real (D). Isto é:

$$E = \frac{d}{D}$$

As questões que envolvem o uso da escala estão geralmente relacionadas a três situações:

1. Calcular a distância real entre dois pontos, separados por 5cm (d), num mapa de escala (E) 1: 300 000.

D = 5cm x 300.000		**1.500.000cm ou 15km**

2. Calcular a distância no mapa (d) de escala (E) 1: 300 000 entre dois pontos situados a 15km de distância (D) um do outro.

$d = \dfrac{1.500.000cm}{300.000}$		**5cm**

3. Calcular a escala (E), sabendo-se que a distância entre dois pontos no mapa (d) de 5 cm representa a distância real (D) de 15km.

$$E = \frac{d}{D} = \frac{5cm}{15km} = \frac{5cm}{1.500.000cm} = \frac{1}{300.000} \text{ ou } 1 : 300.000$$

Resumo

Nesta aula vimos que as razões são representações da proporcionalidade, a chamada regra de três. Não esqueça que treino ajuda a desenvolver a habilidade com os cálculos matemáticos.

Atividades de aprendizagem

- Busque por um exemplo do seu cotidiano que utilize:

a) Uma proporção direta

b) Uma proporção inversa

Anotações

Aula 5 – Progressões Aritméticas

Nesta aula veremos um tipo mais específico de representação de sequências numéricas finitas ou infinitas sucessivas: a progressão aritmética.

Chama-se sequência ou sucessão numérica, a qualquer conjunto ordenado de números reais ou complexos. Assim, por exemplo, o conjunto ordenado A = (3, 5, 7, 9, 11, ... , 35) é uma sequência cujo primeiro termo é 3, o segundo termo é 5, o terceiro termo é 7 e assim sucessivamente.

Uma sequência pode ser finita ou infinita.

O exemplo dado (conjunto A) é de uma sequência finita.

Já a sequência dos números pares P = (0, 2, 4, 6, 8, ...) é infinita.

Exercício resolvido:

Considere as seguintes **sequências de números:**

I. 3, 7, 11,...

II. 2, 6, 18,...

III. 2, 5, 10, 17,...

O número que continua cada uma das sequências na ordem dada deve ser respectivamente:

a) 15, 36 e 24

b) 15, 54 e 24

c) **15, 54 e 26**

d) 17, 54 e 26

e) 17, 72 e 26

Observe que a sequência I tem razão igual a 4, pois, 3 → 7 → 11 → **15** "vai de 4 em 4" a razão da progressão é 4, ou a diferença entre 7 e 3 é igual a 4.

A sequência II não é uma PA, pois, a lei de formação se dá em fatores que são obtidos **multiplicando** os termos por três. Sendo assim: 2 → 6 → 18 → **54**.

A sequência III não é uma PA, pois, a lei de formação se dá em somas de números ímpares distintos (+ 3, +5, +7, +9). Sendo assim: 2 → 5 → 10 → 17 → **26.**

Toda a lei de formação com números em sequência em que **a diferença entre um número e seu anterior é constante** recebe o nome de Progressão Aritmética, ou, simplificadamente, é conhecida pela abreviatura **PA.**

5.1 Conceito de Progressão Aritmética - PA

Chama-se Progressão Aritmética (PA) toda sequência numérica cujos termos a partir do segundo, são iguais ao anterior somado com um valor constante denominado razão.

Exemplos:

A = (1, 5, 9, 13, 17, 21, ...) razão = 4 (PA crescente)

B = (3, 12, 21, 30, 39, 48, ...) razão = 9 (PA crescente)

C = (5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, ...) razão = 0 (PA constante)

D = (100, 90, 80, 70, 60, 50, ...) razão = -10 (PA decrescente)

A diferença entre os termos é chamada de **razão** r.

Obs.: $r = 0 \rightarrow$ PA é constante.

$r > 0 \rightarrow$ PA é crescente.

$r < 0 \rightarrow$ PA é decrescente.

5.2 Fórmula do enésimo termo

Pela definição de PA, a fórmula do segundo termo é:

$$a_2 = a_1 + r \qquad a_3 = a_2 + r \qquad a_4 = a_3 = r$$

$$a_3 = \overbrace{a_1 + r} + r \qquad a_4 = \overbrace{a_1 + 2r} + r$$

$$a_3 = a_1 + 2r \qquad a_4 = a_1 + 3r$$

Logo se pode deduzir que para um termo qualquer a_x:

$$\boldsymbol{a_x = a_1 + (n - 1)r}$$

Você sabia?

Fórmula da soma de uma PA feita por um "Piá"

O diretor de uma escola (provavelmente professor de matemática), tentando manter a classe quieta, propôs um problema: somar todos os números de 1 a 100. Para a surpresa do professor, logo em seguida, um aluno (um "Piá"), Johann Carl Friedrich Gauss (mais tarde um grande matemático, viveu de 1777-1855) deu a resposta: 5050.

Surpreso, o professor perguntou como Gauss conseguira o resultado tão rapidamente e ele explicou seu raciocínio:

Ele notou que o 1° algarismo mais o último eram iguais a 101 e que o 2° mais o penúltimo também era igual a 101:

1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... | 96 | 97 | 98 | 99 | 100

101

101

101

Como existem 50 destes termos, tem-se:

$$50 \, . \, 101 = 5050$$

Importante

A lei de formação, ou seja, a expressão matemática que relaciona entre si os termos da sequência é denominada **termo geral ou generalização**.

5.3 Exemplos de aplicação do termo geral de uma PA

Considere a sequência cujo termo geral (lei geral ou generalização) seja dado por $a_n = 3n + 5$, onde n é um número natural não nulo.

Observe que atribuindo valores para n, obteremos o termo a_n (enésimo termo) correspondente.

Assim, por exemplo, para n = 20, teremos:

$a_n = 3.20 + 5 = 65$, e portanto o vigésimo termo dessa sequência (a_{20}) é igual a 65.

Prosseguindo com esse raciocínio, podemos escrever os demais termos da sequência "S" que seria:

S = (8, 11, 14, 17, 20, ...).

Outro exemplo:

Seja por exemplo a sequência de termo geral $a_n = n^2 + 4n + 10$, para *n* inteiro e positivo.

Nestas condições, podemos concluir que a sequência poderá ser escrita como: (15, 22, 31, 42, 55, **70**, ...).

Pela lei geral de formação:

$a_6 = 70$ porque $a_6 = 6^2 + 4.6 + 10 = 36 + 24 + 10 = \mathbf{70}$.

5.4 Propriedades das Progressões Aritméticas

P1.

Numa PA, cada termo (a partir do segundo) é a média aritmética dos termos equidistantes deste.

Exemplo:

Seja uma PA representada por três termos: (*m, n, r*)

O termo *n*, é a média entre os "vizinhos"

$$\mathbf{n = \frac{(m + r)}{2}}$$

Dica:

Se o enunciado do problema tem a seguinte frase: "Três números estão em PA, ... ," Pode-se resolver o problema considerando que a PA é do tipo: (x - r, x, x + r), onde r é a razão da PA.

P2.

Numa PA, a soma dos termos equidistantes dos extremos é constante.

Exemplo geral:

Considere uma PA: (m, n, r, s, t); portanto, m + t = n + s = r + r = 2r

Exemplo prático:

Sabendo que a sequência (1 – 3x, x - 2, 2x + 1) é uma PA, determine o valor de X.

Pela propriedade $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

a_1 = primeiro termo = 1-3x

a_2 = segundo termo = x-2

a_3 = terceiro termo = 2x+1

Resolvendo a equação

x-2-(1-3x) = 2x+1-(x-2)

x-2-1+3x = 2x+1-x+2

4x-3 = x+3

4x-x = 3+3

3x = 6

x = 2

5.5 Soma dos n primeiros termos de uma PA

Seja a PA (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n).

A soma dos *n* primeiros termos $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$, pode ser deduzida facilmente, da aplicação da segunda propriedade acima.

Temos:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$

É claro que também poderemos escrever a igualdade acima como:

$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_3 + a_2 + a_1$

Somando membro a membro estas duas igualdades, vem:

2 vezes $S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_n + a_1)$

Logo, pela segunda propriedade acima, as *n* parcelas entre parênteses possuem o mesmo valor (são iguais à soma dos termos extremos $a_1 + a_n$), de onde concluímos que:

$2 \times S_n = (a_1 + a_n).n$, onde *n* é o número de termos da PA.

Daí:

$$\mathbf{Sn = \frac{(a1 + an) \cdot n}{2}}$$

Exemplo:

Calcule a soma dos 200 primeiros números ímpares positivos.

Temos a PA: (1, 3, 5, 7, 9, ...)

Precisamos conhecer o valor de a_{200} .

Mas, $a_{200} = a_1 + (200 - 1).r = 1 + 199.2 = 399$

Logo, $S_n = [(1 + 399). 200]/2 = 40.000$

Portanto, a soma dos duzentos primeiros números ímpares positivos é igual a 40.000.

Resumo

Nesta aula vimos um tipo específico de progressão, a PA. Progressão Aritmética é toda sequência de números na qual a diferença entre um termo e outro é constante. Essa diferença é chamada de razão, e costuma ser representada pela letra r.

Atividades de aprendizagem

- Uma fábrica produziu, em 1986, 6.530 unidades de um determinado produto e, em 1988, produziu 23.330 unidades do mesmo produto. Sabendo que a produção anual desse produto vem crescendo em progressão aritmética, pede-se:

a) Quantas unidades do produto essa fábrica produziu em 1987?

b) Quantas unidades foram produzidas em 1991?

Aula 6 – Progressões geométricas

Veremos nessa aula um tipo específico de representação de sequências numéricas finitas ou infinitas sucessivas: a progressão geométrica.

Podemos definir progressão geométrica, ou simplesmente PG, como uma sucessão de números reais obtida, com exceção do primeiro, multiplicando o número anterior por uma quantidade fixa q, chamada razão.

Para calcular a razão da progressão, caso ela não esteja suficientemente evidente, divide-se entre si dois termos consecutivos. Por exemplo, na sucessão (1, 2, 4, 8,...), q = 2, pois 4 : 2 = 2 ou 8 : 4 = 2 e assim sucessivamente.

6.1 Termo geral de uma PG

O termo geral de uma PG é dado por $\mathbf{a_n = a_1 \times q^{n-1}}$ e indica que, para obter um termo de posição n de uma PG, basta multiplicar o primeiro termo a_1 pela razão q elevada a n - 1.

6.1.1 Exemplos de Progressões Geométricas:

A sequência S = {8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024} é uma PG de 8 termos, com razão 2. (Por exemplo, a divisão entre o segundo e primeiro termo é igual a 16 : 8 = 2, razão da PG)

A sequência S = {5, 15, 45, 135} é uma PG de 4 termos, com razão 3. (Por exemplo, a divisão entre o segundo e primeiro termo é igual a 15 : 5 = 2, razão da PG).

Exercícios resolvidos:

1. Calcular o 1º termo de uma PG cujo 6º termo vale 1 e a razão 2.

Retirando os valores do enunciado:

$a_1 = ?$
$n = 6$
$q = 2$
$a_6 = 1$

Resolvendo:

$a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$

$a_6 = a_1 \,.\, q^{6-1} = a_1 \,.\, 2^5 = 1$

$a_1 = \dfrac{1}{32}$

2. Calcular o 1° termo de uma PG cujo 5° termo vale 2 e a razão 3.

Retirando os valores do enunciado:

$a_1 = ?$
$n = 5$
$q = 3$
$a_5 = 2$

Resolvendo:

$a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$

$a_5 = a_1 \,.\, q^{5-1} = a_1 \,.\, 2^4 = 2$

$a_1 = \dfrac{2}{16}$

$a_1 = \dfrac{1}{8}$

3. Sendo 32 o primeiro termo de uma PG e 2 é a sua razão, calcule o termo de ordem 8.

Retirando os valores do enunciado:

$a_1 = 32$
$q = 2$
$a_8 = ?$
$n = 8$

Agora usando a fórmula do termo geral:

$\mathbf{a_n = a^1 \,.\, q^{n-1}}$

Resolvendo:

$a_n = a_1.q^{n-1}$

$a_8 = a_1.q^{8-1}$

$a_8 = 32.2^7$

$a_8 = 32.128$

$a_8 = 4096$

4. Sendo 16 o primeiro termo de uma PG e 3 é a sua razão, calcule o termo de ordem 6.

Retirando os valores do enunciado:

$a_1 = 16$
$q = 3$
$a_6 = ?$
$n = 6$

Usando a fórmula do termo geral:

$\mathbf{a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}}$

Resolvendo:

$a_n = a_1.q^{n-1}$

$a_6 = 16.q^{6-1}$

$a_6 = 16.2^5$

$a_6 = 16.32$

$a_6 = 512$

6.2 Propriedades principais

P1 – em toda PG, um termo é a média geométrica dos termos imediatamente anterior e posterior.

Exemplo: dada uma Progressão Geométrica genérica (A, B, C, D, E, F, G)

É correto afirmar que:

$B^2 = A \,.\, C$
$C^2 = B \,.\, D$
$D^2 = C \,.\, E$
$E^2 = D \,.\, F$ etc.

P2 – o produto dos termos equidistantes dos extremos de uma PG é constante.

Exemplo: dada uma Progressão Geométrica genérica (A, B, C, D, E, F, G)

Temos então: $A \,.\, G = B \,.\, F = C \,.\, E = D \,.\, D = D^2$

6.3 Soma dos *n* primeiros termos de uma PG

Seja a PG ($a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$). Para o cálculo da soma dos **n** primeiros termos S_n, utilizamos a seguinte fórmula da soma:

$$S_n = \frac{a_n \,.\, q - a_1}{q - 1}$$

Se substituirmos $a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$, obteremos uma nova apresentação para a fórmula da soma, ou seja:

$$S_n = a_1 \,.\, \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Exemplo:

Calcule a soma dos 10 primeiros termos da PG (1, 2, 4, 8,...). Temos:

$$S_{10} = \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 1.023$$

Observe que neste caso $a_1 = 1$.

6.4 Soma dos termos de uma PG decrescente e infinita

Considere uma PG com infinitos termos e decrescente. Nestas condições, podemos considerar que no limite teremos $a_n = 0$. Substituindo na fórmula anterior, encontraremos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Exemplo:

Resolva a equação: $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16} + \ldots = 100$

Ora, o primeiro membro é uma PG de primeiro termo x e razão $\frac{1}{2}$. Logo, substituindo na fórmula, vem:

$$\frac{x}{1 - \frac{1}{2}} = 100$$

Daí vem: $x = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$

Resumo

Nesta aula vimos um tipo específico de progressão. A Progressão Geométrica (PG) é toda sequência de números reais ou complexos, onde cada termo a partir do segundo é igual ao anterior, multiplicado por uma constante denominada razão. Tal razão costuma ser representada pela letra q.

Atividades de aprendizagem

- Uma população de bactérias dobra seu número a cada 30 minutos. Considerando que o processo se inicia com uma única bactéria, quantas existirão após 4 horas e 30 minutos?

Aula 7 – Representações algébricas: letras no lugar de números – expressões

Agora você estudará as equações algébricas, uma forma bastante intuitiva de representar algebricamente uma expressão numérica com igualdade.

Na Antiguidade, as letras foram pouco usadas na representação de números e relações. De acordo com fontes históricas, os gregos Euclides e Aristóteles (322-384 a.C), usaram as letras para representar números. A partir do século XIII, com o matemático italiano Leonardo de Pisa (Fibonacci), autor do livro *Liber Abaci* (o livro do ábaco) que começou a arte de calcular, ou seja, a elaborar cálculos algébricos.

O grande uso de letras para resumir mais racionalmente o cálculo algébrico passou a ser estudado pelo matemático alemão Stifel (1486-1567), pelos matemáticos italianos Germano (1501-1576) e Bombelli (autor de *Álgebra* publicada em 1572). Porém, foi o matemático francês François Viéte (1540-1603), que introduziu o uso ordenado de letras nas analogias matemáticas, o desenvolver o estudo do cálculo algébrico.

> O que o matemático faz é examinar "padrões" abstratos – padrões numéricos, padrões de forma, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc. Esses padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais recreativo. Podem surgir a partir do mundo à nossa volta, das profundezas do espaço e do tempo, ou das atividades mais ocultas da mente humana. (DEVLIN, 2002, p. 9)

7.1 Expressões algébricas

São expressões matemáticas que apresentam letras e podem conter números. São também denominadas expressões literais. Por exemplo:

$A = 2a + 7b$

$B = (3.c + 4) - 5$

$C = 23.c + 4$

As letras nas expressões são chamadas variáveis o que significa que o valor de cada letra pode ser substituído por um valor numérico.

Nas operações em uma expressão algébrica, quando substituímos uma variável por um número, obedecemos à seguinte ordem de resolução. É importante observar **que nada mais é que um modo objetivo de poupar cálculos com adições e multiplicações sucessivas:**

1. Potenciação ou Radiciação.

2. Multiplicação ou Divisão.

3. Adição ou Subtração.

Observações importantes quanto à prioridade:

1. Antes de cada uma das três operações citadas, deve-se realizar a operação que estiver dentro dos parênteses, colchetes ou chaves, justamente por estes indicarem o que vem primeiro em uma expressão algébrica/numérica.

2. A multiplicação pode ser indicada por "×" ou por um ponto "·" ou às vezes sem sinal, desde que fique clara a intenção da expressão.

3. Muitas vezes devemos utilizar parênteses quando substituímos variáveis por valores negativos. Tal procedimento evita que se "percam" os sinais negativos das relações financeiras.

Exemplos:

Consideremos P = 2 . A + 10 e tomemos A = 5. Assim temos: P = 2.5 + 10 = 10 + 10 = 20.

Aqui 'A' é a variável da expressão, o 5 é valor numérico da variável, e 20 é o valor numérico da expressão indicada por P.

Observe que ao mudar o valor de A para 9 (por exemplo), teremos: A = 2 . 9 + 10 = 18 + 10 = 28 se A = 9, o valor numérico de P = 2 . A + 10 é igual a 28.

Outros exemplos:

a) Seja X = 4.A+2+B-7 e tomemos A = 5 e B = 7. Assim temos: X = 4 . 5 + 2 + 7 – 7 = 20 + 2 – 0 = 22

Resumindo se $A = 5$ e $B = 7$, o valor numérico da expressão $X = 4 . A + 2 + B - 7$ é 22.

b) Seja $Y = 18 - C + 9 + D + 8 . C$, onde $C = -2$ e $D = 1$.

Então: $Y = 18 -(-2) + 9 + 1 + 8 (-2) = 18 + 2 + 9 + 1 - 16 = 30 -16 = 14$.

Resumindo Se $C = -2$ e $D = 1$, o valor numérico da expressão $Y = 18 - C + 9 + D + 8. C$, é 14.

Através desses exemplos concluímos que o valor numérico de uma expressão algébrica é o valor obtido na expressão quando substituímos a variável por um número real qualquer.

7.2 Polinômios e Produtos notáveis

Uma expressão algébrica envolvendo somente potências não-negativas de uma ou mais variáveis e não contendo variáveis no denominador, é chamada de *polinômio*.

Por exemplo:

$2x$ $\qquad x^2-3x+1$ $\qquad \dfrac{4}{3}x^5 + 3x^3 - \dfrac{1}{7}$ são polinômios na variável *x*.

As letras identificam as variáveis, os números são os coeficientes e os expoentes das potências indicam a ordem do polinômio.

Termos que diferem apenas pelo valor de seus coeficientes constantes são chamados **termos semelhantes**. Por exemplo, $5x^2$ e $-2x^2$ são termos semelhantes.

Um polinômio pode ser denominado de acordo com o seu número de termos, isto é, um polinômio de um termo pode ser chamado **monômio**; de dois termos, **binômio** e de três termos, **trinômio**. Os demais são chamados de polinômios e dependem do valor numérico do maior expoente para definir o grau do mesmo.

Exemplos:

O polinômio $-5x^4 + 14x^5y^2 - 7x^3y^2$ é do grau 7, pois o seu termo de maior grau é o segundo, que é do grau 7.

O polinômio $4a^2b^3 + 5a^5$ é do grau 5, pois ambos os termos do polinômio são deste grau.

Tendo em vista que a matemática é formada por padrões, alguns produtos algébricos (letras e números) aparecem com frequência nos cálculos. Em vez de fazer a multiplicação de polinômios através da propriedade distributiva, vale à pena memorizar sua fórmulas.

Principais produtos notáveis:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

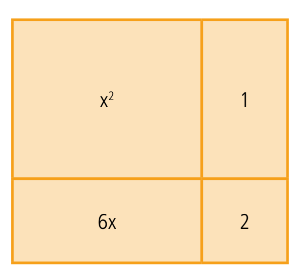
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Resumo

Nesta aula aprendemos sobre expressões algébricas e leis gerais de formação, em especial a dos polinômios e dos produtos notáveis.

Atividades de Aprendizagem

- Na figura abaixo, você percebe que a área de um dos quadrados é x^2, e a área de um dos retângulos é 6x.



Nessas condições responda:

a) Qual é a área do retângulo 1? ______________________________

b) Qual é a área do quadrado 2? ______________________________

c) Qual é a área total da figura? ______________________________

Aula 8 – Relações algébricas: equações do 1º grau

Nesta aula veremos uma das aplicações das relações algébricas no campo dos números reais: as equações algébricas.

O pensamento algébrico é útil para representar situações reais do campo linguístico em notação simbólica matemática.

> Não é fácil definir pensamento algébrico. Segundo Arcavi (2006) o pensamento algébrico inclui a conceitualização e aplicação de generalidade, variabilidade, estrutura. O autor defende ainda que o principal instrumento da Álgebra seja os símbolos. Apesar do pensamento algébrico e dos símbolos terem muito em comum, não significam exatamente a mesma coisa. Pensar algebricamente consiste em usar os instrumentos simbólicos para representar o problema de forma geral, aplicar procedimentos formais para obter um resultado, e poder interpretar esse resultado (...) ter "symbol sense" implica (...) questionar os símbolos em busca de significados, e abandoná-los a favor de outra representação quando eles não proporcionam esses mesmos significados.
>
> Retirado de:
> http://www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf

Vamos analisar alguns exemplos da transformação da linguagem falada (literal) para a linguagem simbólica matemática (algébrica).

8.1 Propriedades e características das Equações do 1º grau

As equações do primeiro grau são aquelas que podem ser representadas sob a forma $ax + b = 0$, em que 'a' e 'b' são constantes reais, com 'a' diferente de 0, e 'x' é a variável. A resolução desse tipo de equação é fundamentada nas propriedades da igualdade descritas a seguir.

P1. Adicionando um mesmo número a ambos os membros de uma equação, ou subtraindo um mesmo número de ambos os membros, a igualdade se mantém.

P2. Dividindo ou multiplicando ambos os membros de uma equação por um mesmo número não-nulo, a igualdade se mantém.

Exemplo

Princípio aditivo

$5 + 7 = 12 \rightarrow (5 + 7) + 3 = 12 + 3$

$5 + 7 = 12 \rightarrow (5 + 7) - 3 = 12 - 3$

Princípio multiplicativo

$4 + 6 = 10 \rightarrow (4 + 6) \,.\, 2 = 10 \,.\, 2$

$5 + 7 = 12 \rightarrow (4 + 6) : 2 = 10 : 2$

Vejamos alguns exemplos de equações resolvidas pelo principio de equivalência dos membros:

Seja a equação: **$x - 3 = 9$**

$$x - 3 = 9$$
$$x - 3 + 3 = 9 + 3$$
$$x = 12$$

Seja a equação: **$5x = 10 + 4x$**

$$5x = 10 + 4x$$
$$5x - 4x = 10 + 4x - 4x$$
$$x = 10$$

Seja a equação: **$3x = 15$**

$$3x = 15$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$$
$$x = 5$$

Estes são exemplos de equações do 1° grau resolvidas pelo método algébrico de igualdade entre os membros da equação (principio do equilíbrio em uma balança de dois pratos).

A figura seguinte ilustra este pensamento:

Figura 8.1: Balança representando a ideia de equivalência entre os membros de uma equação
Fonte: http://mundoeducacao.uol.com.br

Exercícios resolvidos

1. Pensei em um número, tiro 200 e obtenho 700. Em que número pensei?

Solução:
$x - 200 = 700$
$x = 700 + 200$
$X = 900$

Resposta: Esse número é 900.

2. Um número mais a sua metade é igual a 150. Qual é esse número?

Solução:
$n + n/2 = 150$
$2n/2 + n/2 = 300/2$
$2n + n = 300$
$3n = 300$
$n = 300/3$
$n = 100$

Resposta: Esse número é 100.

3. O triplo de um número menos 5 é igual a 4. Qual é esse número?

Como não sabemos o valor do número procurado, vamos chamá-lo por uma letra, por exemplo, n. Agora, vamos fazer a transformação do problema em equação passo a passo:

1º) O triplo desse número: 3n
2º) Menos cinco: 3n – 5
3º) É igual a 4:
3n – 5 = 4
Portanto, a equação que representa a situação-problema descrita é: 3n – 5 = 4.

Resolvendo a equação:
3n = 4 + 5
3n = 9
n = 9/3
n = 3

As equações que tem apenas uma solução são chamadas de equações do 1° grau.

Resumo

Vimos nesta aula que as equações do primeiro grau são aquelas que podem ser representadas sob a forma ax + b = 0, sendo que 'a' e 'b' são constantes e números reais, sendo que 'a' deve ser diferente de 0, e x é a variável. A resolução desse tipo de equação é fundamentada na ideia de igualdade, pois, adicionando um mesmo número a ambos os membros de uma equação, ou subtraindo um mesmo número de ambos os membros, a igualdade se mantém.

Atividades de aprendizagem

- O consumo de energia elétrica dos aparelhos de uma casa é obtido aplicando a seguinte expressão:

$$k = \frac{t * P}{1000}$$

Onde k: quilowatt/hora, **t:** tempo em que o produto permanece ligado, **P:** potência do aparelho (encontrado nos manuais e na etiqueta do aparelho)

Todo aparelho possui uma potência que é dada em watts (W), e quanto mais tempo ficar ligada, maior o consumo de energia elétrica.

Vamos observar a seguinte situação:

Um televisor de 29 polegadas possui em média uma potência de 200 watts. Considerando que ele fique ligado 6 horas diárias, calcule seu consumo em kWh mensal.

Resolução:
6 horas diárias
6 x 30 = 180 horas mensais.
Temos que:
t = 180 horas mensais
P = 200
k = (180 x 200) / 1000
k = 36000 / 1000
k = 36

O televisor irá consumir **36 kWh** no período.

Para saber o custo em dinheiro, basta multiplicar o consumo do período pelo valor do kWh, que vem identificado no talão de energia elétrica da concessionária fornecedora.

Retirado de: http://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/consumo-energia-eletrica.htm

Procure por outro aparelho elétrico, e calcule o consumo de energia.

Anotações

Aula 9 – Equação do 2º grau

Nesta aula apresentamos as equações de segundo grau, também conhecida como equação quadrática, por ser uma equação polinomial de grau dois e terá sempre duas soluções reais ou complexas.

Uma equação quadrática ou equação do segundo grau é uma equação polinomial de grau dois.

A forma geral deste tipo de equação é: ax2 + bx + c = 0, onde x é uma variável, e a, b e c são constantes, das quais $a \neq 0$ (caso contrário, a equação torna-se linear). As constantes a, b e c, são chamadas respectivamente de coeficiente quadrático, coeficiente linear ou termo independente.

Resumindo:

Forma geral: $ax^2 + bx + c = 0$

Onde a, b, c pertencem ($\in$) ao conjunto dos números Reais, com $a \neq 0$.

Desta forma, são equações do segundo grau com uma variável:

a) $2x^2 - 3x + 4 = 0$

Onde:
$a = 2$
$b = -3$
$c = 4$

b) b) $2y^2 + 8y - 14 = 0$

Onde:
$a = 2$
$b = 8$
$c = -14$

9.1 Resolução de equações de 2º grau – cálculo das raízes reais

Talvez o método mais conhecido no Brasil para encontrar as raízes (solução) de uma equação do 2º grau seja a fórmula de Bháskara.

> Neste caso – da resolução das equações de 2º grau –, somente um livro diz que a fórmula de Bháskara não é dele: "só temos a contar mais uma coisinha: a fórmula de Bháskara, curiosamente, não foi deduzida por Bháskara. Como já dissemos, a fórmula de Bháskara não foi proposta por Bháskara. E não se sabe por que a fórmula acabou sendo batizada com seu nome. Alias, diga-se de passagem, esse não é o único caso em que se atribui uma descoberta a alguém que não a realizou. Bháskara viveu na Índia por volta de 1150. Esse ilustre matemático resolveu vários problemas complicados, alguns dos quais envolviam equações de 2º grau. No entanto, muito antes dele, a resolução da equação já era conhecida. Os historiadores encontraram indícios de que, na civilização da babilônia, em 1700 a.C., já eram resolvidas algumas equações de 2º grau. Depois dessa época remota, parece ter sido Al-Khowarizmi, no século IX, o maior especialista no assunto. Ele viveu em Bagdá e é considerado um dos principais criadores da álgebra. Escreveu o livro Al-jabr we muqabalah, cujo título inspirou o nome dado a essa ciência. Nessa obra, Al-Khowarizmi apresentou exemplos de como resolver equações de 2º grau. O interessante é que ele não usava fórmulas, nem símbolos algébricos. Ele trabalhava com palavras e figuras!"
>
> Retirado de: http://antiga.ppgect.ufsc.br/dis/17/Dissert.pdf

Uma equação de 2º grau tem três termos principais.

c) o termo que possui a variável ao quadrado (representado pela letra '**a**')
d) a variável (está ao lado do 'x', representado pela letra '**b**')
e) o termo independente (representado pela letra '**c**').

A fórmula geral é representada por: **ax2 + bx + c = 0**

Se 'a' for igual a zero, teremos uma equação do 1o grau, logo - para ser uma equação do 2º grau - o coeficiente 'a' não pode ser igual a zero.

Resumindo

a é o coeficiente do termo que possui a incógnita ao quadrado (x^2);
b é o coeficiente do termo que possui a incógnita (x);
c é o coeficiente do termo independente.

Na equação:

$-34a^2 + 28a - 32 = 0$ tem-se:

$a = -34$

$b = 28$

$c = -32$

E na equação $10x - 3x^2 = 32 + 15x^2$?

Neste caso temos que transformar a equação que está "desarrumada" na equação, na forma geral:

Subtraindo 32 de ambos os lados:

$10x - 3x^2 - 32 = 32 + 15x^2 - 32$

$10x - 3x^2 - 32 = 15x^2$

Subtraindo 15x2 em ambos os termos:

$10x - 3x^2 - 32 - 15x^2 = 15x^2 - 15x^2$

$10x - 3x^2 - 32 - 15x^2 = 0$

Somando-se os termos em comum:

$10x - 32 - 18x^2 = 0$

Colocando em ordem de maior para o menor expoente:

$-18x^2 + 10x - 32 = 0$

Agora é intuitivo determinar os coeficientes:

$a = -18$

$b = +10$

$c = -32$

Fórmula geral de resolução de equações de 2° grau

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

As equações que têm duas soluções chamadas de equações do 2º grau. Usualmente as raízes da equação do segundo grau são chamadas de x' e x''.

Deste modo, justificamos a presença do sinal de ± para representar as duas soluções da equação do 2º grau, a de discriminante positivo e negativo.

Outro modo de apresentar a Fórmula de Bháskara é separar a equação da parte de dentro da raiz (radicando), que é chamada de "**DISCRIMINANTE**" e representada pela letra grega Δ (delta).

Portanto, a fórmula de Bháskara pode ser escrita assim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$\Delta = b - 4ac$$

Onde "a", "b" e "c" são os coeficientes dos termos de nossa função quadrática.

Nesta aula vamos estudar a vantagem analítica deste "delta" na fórmula.

Se o delta for igual à zero ($\Delta = 0$), não teremos diferença entre as raízes. Como uma função quadrática sempre tem que ter duas raízes, dizemos que a função com $\Delta = 0$ tem as duas raízes idênticas.

Se $\Delta \neq 0$, então a função tem duas raízes distintas:

$\Delta =$ **0** raízes reais e idênticas (iguais);
$\Delta \neq$ **0** raízes distintas (diferentes).

Agora, quando $\Delta \neq 0$ (raízes distintas), teremos duas situações:

Δ for positivo ($\Delta > 0$)
Δ for negativo ($\Delta < 0$)

Como o Δ é um radicando (está dentro de uma raiz quadrada), se for negativo ($\Delta < 0$), as raízes serão números complexos não reais, pois raiz de número negativo não é real. E quando Δ for positivo ($\Delta > 0$), então as raízes serão números **REAIS**.

Resumindo:

$\Delta = 0$ raízes reais e idênticas (iguais);
$\Delta \neq 0$ raízes distintas (diferentes);
$\Delta > 0$ raízes REAIS;
$\Delta < 0$ raízes complexas NÃO REAIS.

Algumas considerações importantes sobre a fórmula de Bháskara:

O hábito de dar nome de Bháskara para a fórmula de resolução da equação de 2º grau se estabeleceu no Brasil por volta de 1960. Esse costume, aparentemente só brasileiro (não se encontra o nome de Bháskara para essa fórmula na literatura internacional), não é adequado, pois os problemas que recaem numa equação de 2º grau já apareciam quase 4000 anos atrás, em textos escritos pelos babilônicos. Nestes textos, o que se tinha era uma receita (escrita em prosa, sem uso de símbolos) que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos com coeficientes numéricos.

Bháskara que nasceu na Índia em 1114 e viveu até cerca de 1185; foi um dos mais importantes matemáticos do século 12. As duas coleções de seus trabalhos mais conhecidas são Lilavati ("bela") e Vijaganita ("extração de raízes"), que tratam de aritmética e álgebra respectivamente, e contêm numerosos problemas sobre equações de lineares e quadráticas (resolvidas também com receitas em prosa) progressões aritméticas e geométricas, radicais, tríadas pitagóricas e outros.

Até o fim do século 16 não se usava uma fórmula para obter as raízes de uma equação do 2º grau, simplesmente porque não se representavam por letras os coeficientes de uma equação. Isso só começou a ser feito a partir de François Viéte, matemático francês que viveu de 1540 a 1603

Embora não se deva negar a importância e a riqueza da obra de Bháskara, não é correto atribuir a ele a conhecida fórmula de resolução da equação de 2º grau.

Fonte: Revista do Professor de Matemática, SBM - nº 39

9.2 Exercícios resolvidos:

1. $3x^2 - 7x + 2 = 0$

a = 3, **b =** -7 e **c =** 2

$\Delta - b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4.3.2 = 49 - 24 = 25$

Substituindo na fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2.3} = \frac{7 \pm 5}{6}$$

$$x = \frac{7+5}{6} = 2 \quad e \quad x = \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Logo, a solução da equação é:

$x' = 2$ e $x'' = 1/3$

2. $-x^2 + 4x - 4 = 0$

a = -1, **b =** 4 e **c =** -4

$\Delta - b^2 - 4ac = 4^2 - 4.-1.-4 = 16 - 16 = 0$

Substituindo na fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-4 \pm 0}{-2}$$

$x' = x'' = 2$

3. $5x^2 - 6x + 5 = 0$

a = 5 **b =** -6 **c =** 5

$\Delta - b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4.5.5 = 36 - 100 = -64$

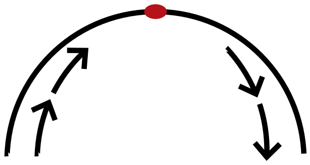
Note que < 0 e não existe raiz quadrada de um número negativo. Assim, a equação não possui nenhuma raiz real.

Saiba mais

Equação do 2º grau, para que serve?

Lançamento de projéteis:

Um canhão atira um projétil (conforme figura), descrevendo a função s = -9.t² + 120.t, sendo **s** em metros e **t** em segundos. Calcule o ponto máximo de altura atingida pelo projétil.



Resolução:
A função do movimento do projétil descreve uma parábola decrescente (a < 0), o ponto máximo da **parábola** será a altura máxima atingida pelo projétil.

Cálculo do ponto máximo:

$$Yv = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$Yv = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$Yv = -\frac{120^2 - 4*(-9)*0}{4*(-9)}$$

$$Yv = -\frac{14400}{-36}$$

$$Yv = 400m$$

Retirado de: http://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/aplicacoes-funcao-2-grau-na-fisica.htm

A-Z

Parábola
Curva plana, cujos pontos são equidistantes de um ponto fixo (foco) e de uma reta fixa (diretriz) ou curva resultante de uma seção feita num cone por um plano paralelo à geratriz. Curva que um projétil descreve.
Fonte: Novo Dicionário Brasileiro Melhoramentos - 7ª edição

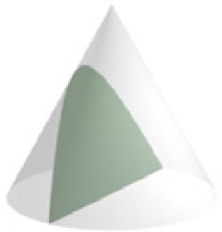


Figura 9.2: Parábola representada por um corte transversal em um cone
Fonte: http://pt.wikipedia.org

Resumo

Nesta aula vimos itens pertinentes as equações de 2º grau, ou seja, a definição, os elementos principais, a fórmula de Bháskara e uma aplicação do vértice da parábola.

Atividades de Aprendizagem

- Pesquise por mais uma aplicação da equação do 2º grau. Registre sua pesquisa com imagens, texto e referências.

Aula 10 – Sistemas de coordenadas cartesianas: plano cartesiano

Nesta aula apresentamos o plano cartesiano, tratado filosófico para obtenção de um sistema coordenado de orientação geométrica com a intenção de ilustrar o alcance do método filosófico para o raciocínio e a busca da verdade. Idealizado por Descartes (filósofo e matemático francês nascido em 1596) com a obra "Discurso do Método", onde descreve um tratado geométrico que serve para estudo dos fundamentos da geometria analítica.

Um sistema de coordenadas cartesianas relaciona cada ponto único de um plano ortogonal por um par de coordenadas numéricas, localizados em quadrantes do eixo 'x' e 'y' perpendiculares entre si.

Cada linha de referência é chamada de eixo de coordenadas ou simplesmente eixo do sistema, e o ponto onde eles se encontram a origem 'O'. As coordenadas são pares ordenados (x, y).

Cada eixo é representado por uma letra:

O eixo 'x' é o eixo horizontal, chamado de abscissa
O eixo 'y é o eixo vertical, chamado de ordenada

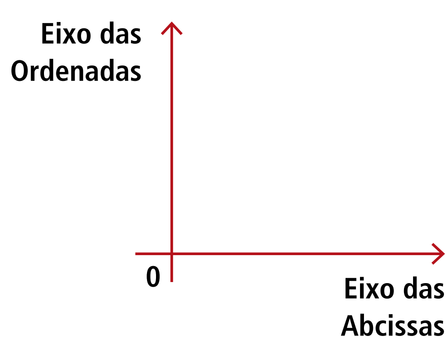


Figura 10.1: Eixos cartesianos
Fonte: http://www.portalsaofrancisco.com.br

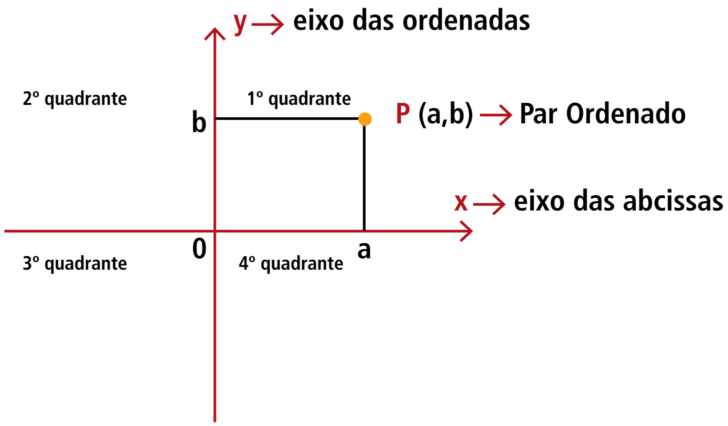


Figura 10.2: Eixos cartesianos e pares ordenados
Fonte: http://ensinomediopenha2010.blogspot.com

10.1 Um pouco de história

A invenção de coordenadas cartesianas data do século XVII por René Descartes (lê-se: "Decartes") que revolucionou a matemática, fornecendo a primeira ligação sistemática entre a geometria euclidiana e a álgebra. Usando o sistema de coordenadas cartesianas, por exemplo, um círculo de raio 2 pode ser descrito como o conjunto de todos os pontos, cujas coordenadas x e y satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 4$.

A ideia deste sistema foi desenvolvido em 1637, em dois escritos de Descartes e independentemente por Pierre de Fermat. Embora Fermat este utilizasse três dimensões, ele não foi ele que publicou a descoberta. Deste modo atribui-se a Descartes o adjetivo latino Cartesius, daí vem o nome cartesiano.

O desenvolvimento do sistema de coordenadas cartesianas permitiu o desenvolvimento da perspectiva e da geometria projetiva. Ele viria a desempenhar um papel intrínseco no desenvolvimento do cálculo por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz.

Coordenadas cartesianas são à base da geometria analítica, e fornecem interpretações geométricas esclarecedoras para muitos outros ramos da matemática, tais como álgebra linear, análise complexa, geometria diferencial, cálculo multivariado, teoria dos grupos, e muito mais.

Um exemplo familiar é o conceito do gráfico de uma função, assunto que abordaremos nas aulas seguintes. Coordenadas cartesianas são também ferramentas essenciais para disciplinas mais aplicadas que lidam com a geometria, incluindo astronomia, física, engenharia e muito mais.

10.2 Geometria métrica plana no plano cartesiano

Para auxiliar a compreensão da localização de coordenadas no plano cartesiano podemos utilizar a noção de poligonais fechadas.

Exemplo prático:

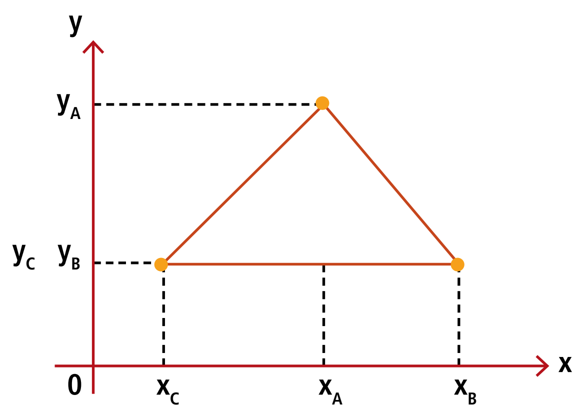


Figura 10.3: Triângulo representado por meio de um plano cartesiano
Fonte: http://mundoeducacao.uol.com.br

Para desenhar o triângulo no 1° **quadrante** do sistema cartesiano (plano cartesiano), precisamos reconhecer quais são os vértices:

A (x_A, y_A) **B (x_B, y_B)** **C (x_C, y_C)**

Por se tratar de sistema cartesiano, as coordenadas numéricas (pares ordenados) são:

A (2, 2) **B (3, 1)** **C (1, 1)**

Resumo

O plano cartesiano, também conhecido como eixo de coordenadas cartesianas, em homenagem a René Descartes, filósofo e matemático é formado pela intersecção perpendicular (90º) entre duas retas enumeradas. O ponto de encontro entre as duas retas forma a origem do plano cartesiano de coordenadas (0, 0).

A criação do eixo de coordenadas teve como objetivo principal, a localização de pontos no espaço. Os eixos são nomeados da seguinte maneira: a reta horizontal é chamada de abscissa (x) e a reta vertical é denominada ordena-

A-Z

Quadrante
(1) quarta parte da circunferência, ou do círculo trigonométrico; (2) cada uma das quatro partes em que um plano é dividido pelos eixos das coordenadas ou retangulares situados no mesmo plano.
Fonte: http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/definicao/quadrante_139835.html

Acesse o site: http://www.iat.educacao.ba.gov.br/node/1382, e aproveite o aplicativo em flash que representa pontos coordenados dinamicamente. Para tal, basta escolher as coordenadas numéricas que o programa se encarrega de representar o ponto em um dos quadrantes do plano cartesiano.

da (y), portanto, todo ponto localizado no sistema possui abscissa e ordenada obedecendo ao par ordenado (x, y).

Atividades de aprendizagem

- No plano cartesiano, desenhe os pontos **A** (-1, 1), **B** (3, 1), **C** (3, 5) e **D** (-1, 5) que são os vértices de um quadrado. Determine as coordenadas do centro desse quadrado.

Aula 11 – Função polinomial do primeiro grau

Nesta aula você irá aprender sobre funções, em especial sobre as funções: linear e afim. Duas representações singulares da função polinomial do 1° grau.

Mas, o que é função?

É a ideia de relação.

Leonhard Euler (1707-1783) matemático suíço quem desenvolveu trabalhos em quase todos os ramos da Matemática, (desenvolvendo) a ideia de função. Foi o responsável também pela adoção do símbolo f(x) = y para representar uma função de 'x' em 'y'.

Uma função f de A em B é uma relação entre dois conjuntos A e B. Para que a relação seja função cada variável 'x' tem apenas uma correspondente em A, da mesma forma um único 'y' em B.

A notação mais usada para função de A em B, é:

$\mathbf{f : A \rightarrow B}$

Chama-se função polinomial do 1° grau toda função real representada pela relação f(x) = ax + b com 'a', 'b' também números reais, com 'a' ≠ 0.

Situações práticas onde fica clara a ideia de função:

- o preço de um armário é função da área que ele cobre;
- a dose de um remédio é função do peso da criança que é medicada;
- a altura de uma criança é função de sua idade;
- o desconto do Imposto de Renda é função da faixa salarial;
- o salário de um vendedor é função do volume de vendas;
- a área de um quadrado é função da medida de seus lados;
- o buraco na camada de ozônio é função do nível de poluição.

Fonte: http://www.colegioinovacao.com.br/cms/documentos/denise_matematica_8a_serie_funcao_polinomial_de_1o_grau_parte_1.pdf

11.1 Tipos de funções

- **Função afim → f(x) = a.x + b**

Exemplo: f(x) = 5x – 3, onde a = 5 e b = – 3

- **Função linear → f(x) = a.x**

Exemplo: f(x) = 6x, onde a = 6 e b = 0

11.2 Gráfico da função do 1.º grau

1º exemplo: Construir o gráfico da função y = 2x + 3

Sabendo que o gráfico da função y = 2x + 3 está relacionado a um polígono de 1.º grau, precisamos somente conhecer dois de seus pontos para traçá-lo. Esses dois pontos podem ser obtidos atribuindo-se dois valores arbitrários para 'x' e determinando suas imagens 'y'.

Algumas ideias:

Se x = 0 → y = 2.0 + 3 → y = 3
Se x = – 2 → y = 2.(-2) + 3 → y = -1
Se x = – 1→ y = 2. (-1) + 3 → y = 1

Localizando os três pares ordenados e unindo os pontos, por se tratar de uma função de R em R ('x' e 'y' são números reais), temos:

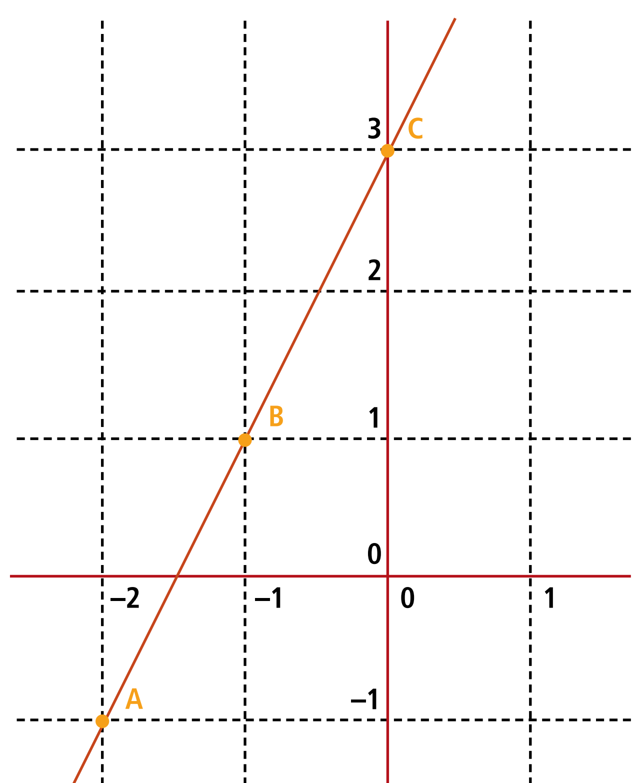


Figura 11.1: Gráfico de uma função polinomial do 1º grau
Fonte: Elaborado pelo autor

2º exemplo: Construir o gráfico da função y = - 2x + 3

Sabendo que o gráfico da função y = - 2x + 3 está relacionado a um polígono de 1.º grau, precisamos somente conhecer dois de seus pontos para traçá-lo. Esses dois pontos podem ser obtidos atribuindo-se dois valores arbitrários para 'x' e determinando suas imagens 'y'.

Algumas ideias:

Se $x = 0 \rightarrow y = -2.0 + 3 \rightarrow y = 3$

Se $x = -2 \rightarrow y = -2.(-2) + 3 \rightarrow y = 7$

Se $x = -1 \rightarrow y = -2.(-1) + 3 \rightarrow y = 5$

Localizando os três pares ordenados e unindo os pontos, por se tratar de uma função de R em R ('x' e 'y' são números reais), temos:

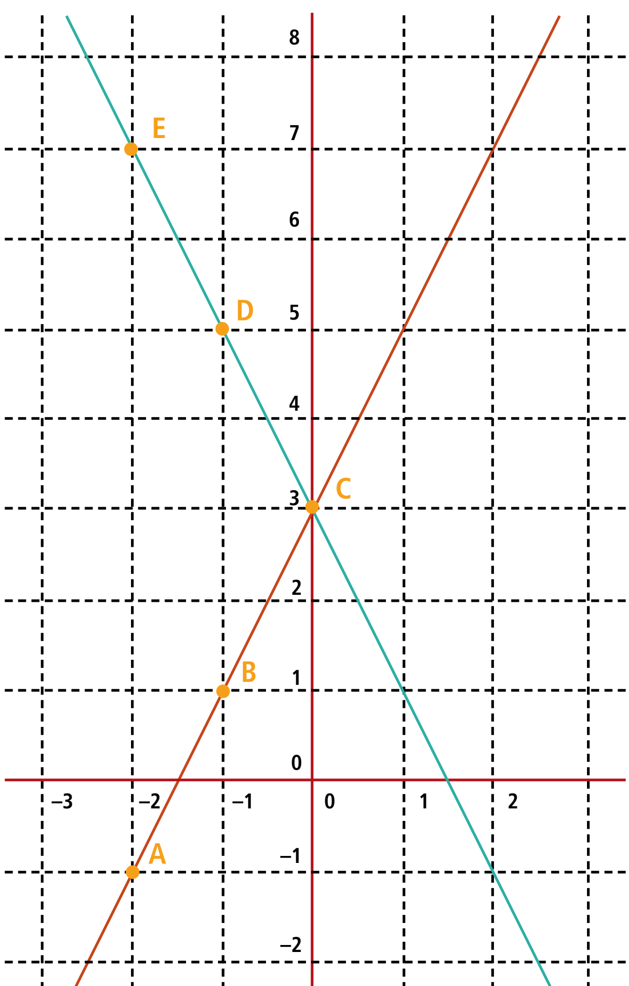


Figura 11.2: Gráfico de uma função polinomial do 1º grau
Fonte: Elaborado pelo autor

Em se tratando de função, podemos generalizar a orientação da reta "em função" do valor de 'a':

Se **a > 0**, a função y = ax + b é crescente.

Se **a < 0**, a função y = ax + b é decrescente.

Resumo

Uma função real, f: IR → IR, cuja lei de formação é dada pela sentença f(x) = a.x + b, onde a é denominado de taxa de variação ou coeficiente angular e b de coeficiente linear é dita função polinomial do 1° grau ou função afim. Quando b = 0, a função polinomial do 1° grau f(x) = a.x é denominada de função linear.

Atividades de aprendizagem

- Em um reservatório havia 50 litros de água. Foi aberta uma torneira que despeja no reservatório 20 litros de água por minuto. A quantidade de água no tanque é dada em função do número x de minutos em que a torneira fica aberta.

Responda:

a) Qual a lei que define a função que determina a quantidade de litros de água do reservatório, em função de x (tempo de abertura da torneira)?

b) Faça o esboço gráfico dessa função.

Aula 12 – Função polinomial do segundo grau

Nesta aula você irá aprender sobre as funções polinomiais do 2º grau, elementos principais e aplicações.

Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função f de IR em IR dada por uma lei de formação $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

São funções quadráticas:

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, onde $a = 3$, $b = -4$ e $c = 1$
b) $f(x) = x^2 - 1$, onde $a = 1$, $b = 0$ e $c = -1$
c) $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, onde $a = 2$, $b = 3$ e $c = 5$
d) $f(x) = -x^2 + 8x$, onde $a = 1$, $b = 8$ e $c = 0$
e) $f(x) = -4x^2$, onde $a = -4$, $b = 0$ e $c = 0$

12.1 Gráfico da função quadrática

O gráfico de uma função polinomial do 2º grau, $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$, com a 0, é uma curva chamada **parábola**.

Exemplo 1:
Construir o gráfico da função $y = x^2 + x$

Primeiro atribuímos arbitrariamente a 'x' alguns valores, depois calculamos o valor correspondente de 'y' e, em seguida, ligamos os pontos assim obtidos.

Se $x = 2 \rightarrow y = 2^2 + 2 \rightarrow y = 6$
Se $x = 1 \rightarrow y = 1^2 + 1 \rightarrow y = 2$
Se $x = 0 \rightarrow y = 0^2 + 0 \rightarrow y = 0$
Se $x = -1/2 \rightarrow y = (-½)^2 - 1/2 \rightarrow y = -1/4$
Se $x = -1 \rightarrow y = (-1)^2 - 1 \rightarrow y = 0$
Se $x = -2 \rightarrow y = (-2)^2 - 2 \rightarrow y = 2$
Se $x = -3 \rightarrow y = (-3)^2 - 3 \rightarrow y = 6$

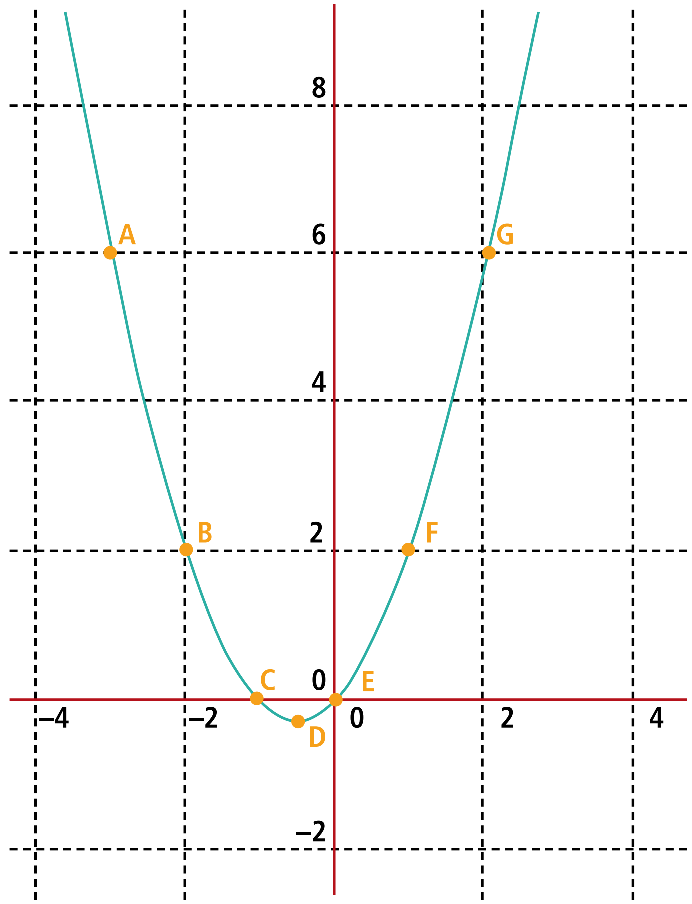


Figura 12.1: Parábola
Fonte: Elaborado pelo autor

Exemplo 2:
Construir o gráfico da função $y = - x^2 + x$

Primeiro atribuímos arbitrariamente a 'x' alguns valores; depois calculamos o valor correspondente de 'y' e, em seguida, ligamos os pontos assim obtidos.

Se $x = 2 \rightarrow y = - 2^2 + 2 \rightarrow y = - 2$
Se $x = 1 \rightarrow y = - 1^2 + 1 \rightarrow y = 0$
Se $x = 0 \rightarrow y = 0^2 + 0 \rightarrow y = 0$
Se $x = - 1/2 \rightarrow y = - (- ½)^2 - 1/2 \rightarrow y = -3/2$
Se $x = -1 \rightarrow y = - (-1)^2 - 1 \rightarrow y = - 2$
Se $x = – 2 \rightarrow y = - (-2)^2 - 2 \rightarrow y = - 4$
Se $x = – 3 \rightarrow y = - (- 3)^2 - 3 \rightarrow y = - 12$

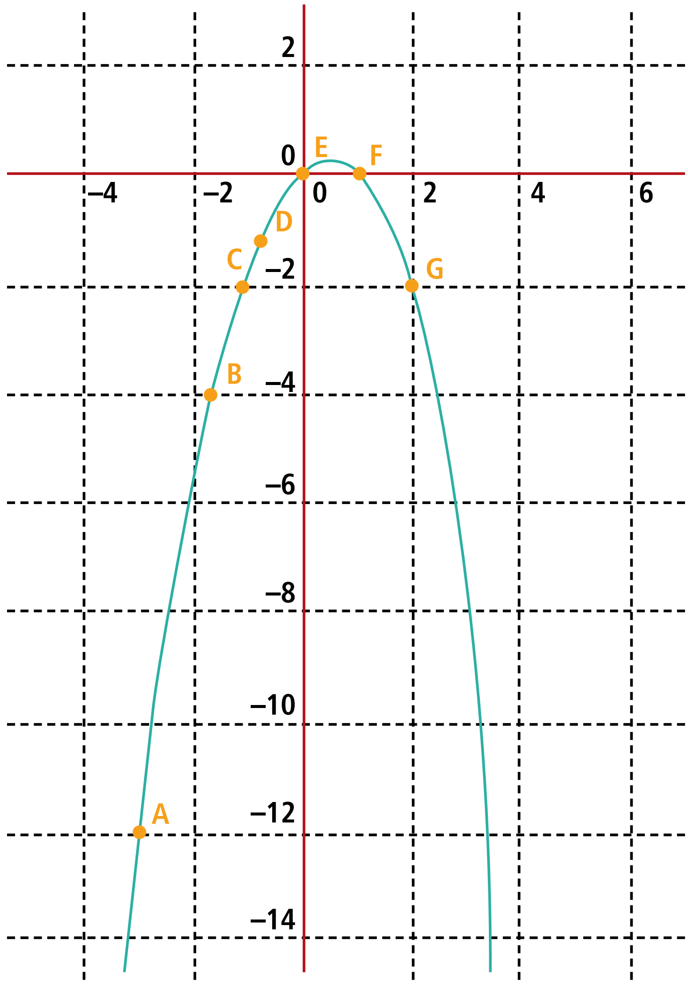


Figura 12.2: Parábola
Fonte: Elaborado pelo autor

Ao construir o gráfico de uma função quadrática $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$, notaremos sempre que:

se **a > 0**, a parábola tem a concavidade voltada para cima

e **a < 0**, a parábola tem a concavidade voltada para baixo

Resumo

Uma função quadrática é definida como uma função que apresenta o expoente 2 como maior expoente das variáveis. O seu gráfico é constituído por uma parábola. É expressa por: $\mathbf{f(x) = ax^2+bx+c}$ se for completa.

Aula 13 – Matemática Financeira: juros simples

Nesta aula veremos algo sobre funções, em especial, as funções afins e as lineares. Ambas serão úteis para o entendimento da progressão aritmética e da capitalização simples.

Juro (juramento) - como vimos anteriormente - é toda compensação em dinheiro que se paga ou se recebe pela quantia em dinheiro que se empresta ou que é emprestada em função de uma taxa e do tempo. Quando falamos em juros, devemos considerar:

- O dinheiro que se empresta ou que se pede emprestado é chamado de valor presente ou capital "**C**".
- A taxa de porcentagem que se paga ou que se recebe pelo aluguel do dinheiro é denominada taxa de juros "**J**".
- O tempo n deve sempre ser indicado na mesma unidade a que está submetida à taxa, e em caso contrário, deve-se realizar a conversão para que tanto a taxa como a unidade de tempo estejam compatíveis, isto é, estejam na mesma unidade.
- O total pago no final do empréstimo, que corresponde ao capital mais os juros, é denominado valor futuro ou montante (**M**).

13.1 Fórmula – juros simples

Para calcular os juros simples de um valor presente ou capital "**C**", durante "**n**" períodos com a taxa de **i%** ao período, basta usar a fórmula:

$$J = C.i.n$$

Fórmula – montante

Para calcular o valor futuro ou montante "**M**", durante "n" períodos com a taxa de **i%** ao período, sobre um valor presente ou capital "**C**", basta usar a fórmula:

$$M = C.(1 + i.n)$$

Exemplo 1

Qual o valor de um capital que, aplicado à taxa de juros simples de 2% ao mês, rendeu depois de um ano R$ 240,00 de juros?

Solução:

Como a taxa é de $i = 2\% = 0{,}02$ ao mês, devemos considerar, para o tempo de 1 ano (12 meses), pois tempo e taxas devem estar na mesma unidade. Os juros produzidos neste período foram de R$ 240,00. Assim:

$\mathbf{J = C.\ i\ .n}$

$240 = C\ .\ 0{,}02.\ 12$

$240 = C\ .\ 0{,}24 \rightarrow C = 1000$

O capital aplicado inicialmente foi de R$ 1000,00.

Exemplo 2

Qual o montante de um capital de R$ 1.000,00 aplicado à taxa de juros simples de 10 % a.a (ao ano) pelo prazo de 2 anos?

Solução:

Dados: $C = 1000{,}00$

$i = 10\% = 0{,}1$ a.a.

$n = 2$ anos

$M = ?$

$\mathbf{M = C.(\ 1 + i.\ n)}$

$M = 1000.(\ 1 + 0{,}1.\ 2)$

$M = 1200$

O montante, após 2 anos, à taxa de juros simples de 10 % a. a., será de R$ 1200,00.

Não esqueça

Ao trabalhar com as fórmulas de juros devemos nos atentar há algumas particularidades das mesmas, tais como:

a) "i" deve estar em sua forma decimal, ou seja, se a taxa for de 10%, devemos dividir por 100, transformando-a em 0,10;

Em resumo		
Forma Percentual	**Transformação**	**Forma Decimal**
12% a.a.	$\frac{12}{100}$	0,12
0,5% a.m.	$\frac{0,5}{100}$	0,005

b) Se unidade utilizada no período não for compatível ao da taxa de juros, deve ser feito a conversão de uma dela, ou seja, uma taxa de 5% a.m e o período de 12 anos convertem-se a taxa para ano (para juros simples) ou o período para mês.

Resumo

Hoje conhecemos um caso especial de função do tipo afim, úteis para o entendimento da progressão aritmética e da capitalização simples.

Anotações

Aula 14 – Matemática financeira: juros compostos

Estudaremos nesta aula a relação entre os Juros Compostos e a Função Exponencial. Este conhecimento é fundamental para se entender o crescimento do montante nas aplicações financeiras.

Observe a demonstração a seguir:

Exemplo: Capital de R$ 500,00; juros de 1% a.m, período de 4 meses.

Período	Capital	Taxas	Juros	Montante
1	500	0,01	5	505
2	505	0,01	5,05	510,05
3	510,05	0,01	5,10	515,15
4	515,15	0,01	5,15	520,30

1º período: $M1 = C + Ci = C(1 + i)$

2º período: $M2 = M1 + M1i$

Logo: $C(1+ i) + C(1+ i)\, i$

$C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$

3º período: $M3 = M2 + M2i = C(1 + I)^3$

4º período: $M4 = M3 + M3i = C(1 + i)^4$

Por dedução lógica chegamos à fórmula geral de juros compostos:

$$\mathbf{M = C.(1 + i)^n}$$

Fórmula análoga a do termo geral de uma PG:

$$\mathbf{a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}}$$

Onde **M = montante**, **C = capital principal**, **i = taxa de juros** e **n = número de períodos** (pode ser representado pela letra "**t**") em que o principal **C (capital inicial)** foi aplicado.

Percebam que agora o número de períodos (n) é um expoente (nos juros simples só havia multiplicações), mostrando que os juros sobre

juros terão uma forma exponencial no longo prazo.

É importante lembrar que na fórmula de juros (simples ou compostos), as unidades de tempo referentes à taxa de juros (i) e do período (n), tem de ser necessariamente iguais. Este é um detalhe importantíssimo, que não pode ser esquecido! Assim, por exemplo, se a taxa for 2% ao mês e o período 3 anos, deveremos considerar 2% ao mês durante 36 meses (3 x 12 = 36 meses).

Relembrando o exemplo da aula anterior:

Na aula de regime de capitalização simples (juros simples) aplicamos um capital de R$ 1.000,00 por dez meses a uma taxa de 10% a.m, acumulando um montante de R$ 2.000,00 no final. Mas e se fossem a juros compostos?

Separando os dados fornecidos no enunciado do problema:

C = 1.000,00   i = 10% a.m. (ao mês) n = 10 meses   M = ?
M = C x (1 + i)n
M = 1.000 x (1 + 0,1)10
M = 1.000 x (1,1)10
M = 1.000 x 2,59374
M = 2593,74

O montante é R$ 2.593,74 e o gráfico fica representado pela função exponencial:

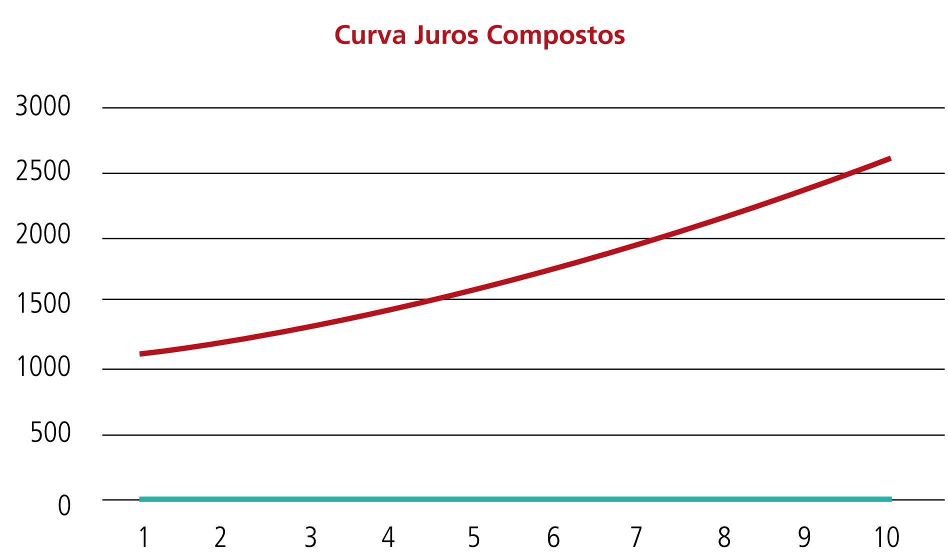


Figura 14.1: Gráfico
Fonte: Elaborado pelo autor

14.1 Juros compostos, exercícios resolvidos

1. Aplicou-se a juros compostos um capital de R$ 1.400.000,00 a 4% ao mês, durante 3 meses. Determine o montante produzido neste período.

Separando os dados fornecidos no enunciado do problema:

$C = 1.400.000,00$ $i = 4\%$ a.m (ao mês) $n = 3$ meses $M = ?$

$M = C \times (1 + i)^n$

$M = 1.400.000 \times (1 + 0,04)^3$

$M = 1.400.000 \times (1,04)^3$

$M = 1.400.000 \times 1,124864$

$M = 1.574.809,600$

O montante é R$ 1.574.809,600

Obs.: Devemos lembrar que 4% = 4/100 = 0,04

2. Qual o capital que aplicado a juros compostos a 8% ao mês, produz em dois meses um montante de R$ 18.915,00 de juros.

Separando os dados fornecidos no enunciado do problema:

$C = ?$ $i = 8\%$ a.m (ao mês) $n = 2$ meses $M = 18.915,00$

Obs.: devemos lembrar que 8% = 8/100 = 0,08

$M = C \times (1 + i)^n$

$18915 = C \times (1 + 0,08)^2$

$18915 = C \times (1,08)^2$

$18915 = C \times 1,1664$

$C = 18915 : 1,1664$

$C = 16.216,56379$ que é aproximadamente igual a $C =$ R$ 16.216,56.

3. A que taxa ao mês esteve aplicado, em uma caderneta de poupança, um capital de R$ 1.440,00 para, em 2 meses, produzir um montante de R$ 1.512,90?

$C = 1.440,00$ $i = ?\%$ a.m (ao mês) $t = 2$ meses $M = 1.512,90$

$M = C \times (1 + i)^n$

$1512,90 = 1440 \times (1 + i)^2$

$(1 + i)^2 = 1512,90 : 1440$
$(1 + i)^2 = 1,050625$
$1 + i =$
$1 + i = 1,025$
$i = 0,025$ (x 100)
$i = 2,5\%$

A taxa é 2,5% ao mês

A grande diferença dos juros é que no final das contas quem financia por juros simples obtêm um montante (valor total a pagar) inferior ao que financia por juros compostos.

Vamos comparar as duas aplicações de capitalização (simples e composto) para um mesmo valor de capital aplicado.

Lembre que a fórmula do Juro Simples é: **J = C. i . t** ou **J = C. i . n**

Onde:

J = juros, C = capital, i = taxa, n ou t = tempo.

Considerando que uma pessoa empresta a outra a quantia de R$ 2.000,00, a juros simples, pelo prazo de 3 meses, à taxa de 3% ao mês. Quanto deverá ser pago de juros?

Antes de iniciarmos a resolução deste problema, devemos retirar do enunciado os dados necessários a resolução do problema:

Capital aplicado (C): R$ 2.000,00
Tempo de Aplicação (t): 3 meses
Taxa (i): 3% ou 0,03 ao mês (a.m)

Fazendo o cálculo, teremos:
J = c . i. t → J = 2.000 x 3 x 0,03 → R$ 180,00

Quer dizer que ao final do empréstimo, ao final dos três meses, a pessoa pagará R$ 180,00 de juros.

Observe que se fizermos a conta mês a mês, o valor dos juros será de R$ 60,00 por mês e esse valor será somado mês a mês, nunca mudará.

Agora e se fossem juros compostos?

A fórmula dos Juros Compostos é: $\mathbf{M = C. (1 + i)^n}$

Onde:

M = Montante, C = Capital, i = taxa de juros, n ou t = tempo.

Considerando o mesmo problema anterior, da pessoa que emprestou R$ 2.000,00 a uma taxa de 3% (0,03) durante 3 meses, em juros simples, teremos:

Capital Aplicado (C) = R$ 2.000,00
Tempo de Aplicação (t) = 3 meses

Fazendo a conversão para decimal: taxa de Aplicação (i) = 0,03 (3% ao mês)

Fazendo os cálculos, teremos:
$M = 2.000.(1 + 0{,}03)^3 \rightarrow M = 2.000 \ . \ (1{,}03)^3 \rightarrow M = R\$ \ 2.185{,}45$

Ao final do empréstimo, a pessoa pagará R$ 185,45 de juros.

Observe que se fizermos a conta mês a mês, no primeiro mês ela pagará R$ 60,00, no segundo mês ela pagará R$ 61,80 e no terceiro mês ela pagará R$ 63,65.

Ou seja, no primeiro mês o juro corresponde a R$ 60,00. No segundo mês o juro corresponde a R$ 61,80. No terceiro mês o juro corresponde a R$ 63,65.

No final das contas no regime de juros simples, o montante seria de R$ 2.180,00 (pagaria os R$ 2.000,00 + R$ 180,00 de juros). Já no caso dos juros compostos o montante seria de R$ 2.185,45 (pagaria os R$ 2.000,00 + R$ 185,45 de juros).

14.2 Quando usar juros simples e juros compostos?

A maioria das operações envolvendo dinheiro utiliza juros compostos. Estão incluídas: compras a médio e longo prazo; compras com cartão de crédito; empréstimos bancários; aplicações financeiras usuais como caderneta de poupança, aplicações em fundos de renda fixa, etc. Os bancos utilizam os juros compostos; e eles lucram com a concessão de crédito, financiamentos.

Todas as operações bancárias envolvem juros e riscos. As operações de baixo risco rendem pouco juro e as de alto risco rendem mais juros, por se tratarem de juros compostos.

Raramente encontramos uso para o regime de juros simples: é o caso das operações de curtíssimo prazo, e do processo de desconto simples de duplicatas. Tal fato ocorre dado o risco de se emprestar dinheiro e não receber o pagamento pela dívida, como o risco de uma pessoa (ou empresa) contrair uma dívida alta e não poder pagar, as instituições financeiras optam por regimes mais rentáveis de cobrança de juros.

Em resumo: Relação entre juros e progressões

Em um regime de capitalização a **juros simples** o saldo cresce em **progressão aritmética**

Em um regime de capitalização a **juros compostos** o saldo cresce em **progressão geométrica**

Resumo

Estudamos a relação entre os Juros Compostos e a Função Exponencial, fundamental para o entendimento do rápido crescimento do montante nas aplicações financeiras. O gráfico da figura 14.2 resume a relação gráfica entre juros simples e juros compostos de modo comparativo.

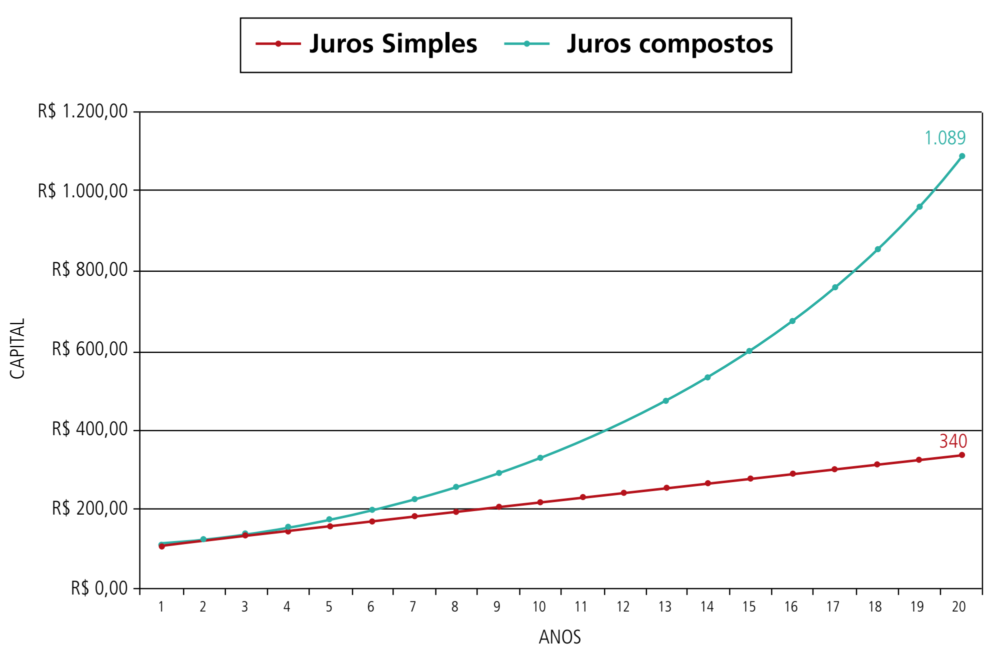


Figura 14.2: Representação gráfica de juros simples e compostos.
Fonte: Elaborado pelo autor

Aula 15 – Sistemas de amortização: os financiamentos

No decorrer da aula 15 vamos definir e nos aprofundar nas técnicas de amortização, utilizando três tipos de tabelas: a SAC (Sistema de Amortização Constante, a SACRE (Sistema de Amortização Crescente) e a PRICE também conhecido como Sistema Francês (tabelas de juro composto pelo seu autor Richard Price).

O que é amortização?

É o pagamento de uma dívida ou de uma prestação de capital com vencimento futuro, antes do prazo estabelecido inicialmente. Muitas vezes os acordos de crédito com as entidades financeiras preveem a possibilidade de amortizações antecipadas, embora, geralmente são cobradas taxas penalizadoras como forma de compensar parte dos juros que deixarão de ser recebidos.

Amortizar que dizer abater, quitar parceladamente uma dívida, normalmente em partes, mas também pode ser de uma única vez, ou seja, amortizar é pagamento de uma dívida de modo antecipado.

Uma parcela de financiamento é composta por duas partes, que são a amortização mais os juros. A parte que corresponde à amortização é deduzida do saldo devedor, fazendo com que a dívida seja diminuída a cada período. Existem dois sistemas de amortização mais usados no nosso sistema bancário e comercial, que são PRICE ou FRANCÊS e o SAC. Especificamente a Caixa Econômica Federal utiliza o Sistema SACRE (Sistema de Amortização Crescente).

Segundo a NBC T 19.5, é obrigatório o reconhecimento da depreciação, amortização e exaustão. Veja na íntegra a lei que versa sobre as Normas Brasileiras de Contabilidade: Depreciação, Amortização e Exaustão.

Disponível em http://www.portaldecontabilidade.com.br/nbc/nbct19_5.htm

Depreciação é a redução do valor dos bens pelo desgaste ou perda de utilidade por uso, ação da natureza ou obsolescência. A depreciação de um ativo começa quando o item está em condições de operar na forma pretendida pela administração, e cessa quando o ativo é baixado ou transferido do imobilizado.

A amortização consiste na recuperação contábil, primeiro, do capital aplicado na aquisição de bens e direitos classificados no ativo imobilizado, cuja existência ou exercício tenha duração limitada ou cuja utilização pelo contribuinte tenha o prazo limitado por lei ou contrato; e segundo dos custos, encargos ou despesas, registrados no ativo diferido, que contribuirão para a formação do resultado de mais de um período de apuração.

A principal distinção entre esses dois encargos é que, enquanto a depreciação incide sobre os bens físicos de propriedade do próprio contribuinte, a amortização relaciona-se com a diminuição de valor dos direitos (ou despesas diferidas) com prazo limitado (legal ou contratualmente).

15.1 Sistemas de amortização (pagamento) de um financiamento imobiliário

Vai comprar uma casa nova?

Saiba quais são as vantagens e as desvantagens das principais modalidades de financiamento.

Por Ariel Kostman

Construir patrimônio e se livrar do aluguel são os principais objetivos de quem compra uma casa financiada. Nessa hora, há um cuidado importante a tomar. A prestação não deve comprometer mais que 20% da renda familiar mensal. É fundamental também verificar o sistema de amortização que será usado para pagar a dívida. Ou seja, a maneira pela qual as prestações serão atualizadas. Existem três opções: Sistema de Amortização Constante (SAC), Sistema de Amortização Crescente (Sacre) e Tabela Price. Nas duas primeiras, mais vantajosas para o mutuário, as parcelas são mais altas no início e vão diminuindo com o tempo. No sistema Price, elas aumentam ao longo do contrato. Quanto mais puder dar de entrada, melhor. Para isso, vale a pena usar o saldo do FGTS e das aplicações financeiras, já que os juros que você vai pagar em um financiamento sempre serão muito maiores do que o rendimento de qualquer aplicação. Outro conselho útil é adiar a compra por um ano e, durante esse período, poupar o valor equivalente ao que pagaria de prestação. Dando esse dinheiro economizado de entrada, é possível reduzir o financiamento em dois anos.

A seguir, as vantagens e desvantagens das quatro principais modalidades para comprar a casa própria a prazo. Com a ajuda do economista Alcides Marini, consultor da Associação Brasileira dos Mutuários da Habitação (ABMH) e especialista em financiamento imobiliário, e da Associação Brasileira das Entidades de Crédito Imobiliário e Poupança (Abecip), Veja São Paulo fez a simulação de como seria comprar um apartamento de 200 000 reais com um financiamento de quinze anos em cada uma das modalidades: SFH, SFI, consórcio e direto com a construtora. A associação fornece orientações gratuitas sobre financiamentos imobiliários pelo telefone 3743-7884.

Sistema Financeiro de Habitação (SFH)

Quem estabelece as regras: o banco
Valor que pode ser emprestado: até 100% do preço do imóvel
Prazo médio para quitar a dívida: entre cinco e vinte anos
Sistema de amortização: pelo SAC, Sacre ou Tabela Price
Taxa de juros: 12% ao ano
Indexador: TR (0,21% ao mês)

Vantagens: o mutuário recebe o dinheiro na hora, podendo adquirir o imóvel imediatamente. As taxas de juros são tabeladas em, no máximo, 12% ao ano.

Desvantagens: os bancos fazem muitas exigências cadastrais e não costumam financiar mais que 70% do valor total do imóvel.

Sistema Financeiro Imobiliário (SFI)

Quem estabelece as regras: o banco
Valor que pode ser emprestado: até 100% do preço do imóvel
Prazo para quitar a dívida: entre cinco e vinte anos
Sistema de amortização: SAC ou Tabela Price
Taxa de juros: de 13 a 15% ao ano
Indexador: TR, INPC ou IGP-M

Vantagens: o financiamento pode ser feito também para a compra de um segundo imóvel ou para um imóvel comercial. Não há limite no valor do financiamento nem no preço do imóvel.

Desvantagens: os juros são mais altos e os bancos exigem comprovação de renda.

Consórcio

Quem estabelece as regras: a administradora do consórcio
Valor que pode ser emprestado: até 100% do preço do imóvel
Prazo para quitar a dívida: até vinte anos
Sistema de amortização: Tabela Price ou SAC
Taxa de administração: 20%
Indexador: INPC ou IGP-M

Vantagens: não exige pagamento de entrada nem comprovação de renda, até que você seja contemplado.

Desvantagens: se demorar a ser sorteado ou não puder fazer um lance, o consorciado poderá esperar muitos anos até poder comprar o imóvel. Há risco de inadimplência do grupo.

Construtora

Quem estabelece as regras: a construtora
Valor que pode ser emprestado: até 100% do preço do imóvel
Prazo para quitar a dívida: entre cinco e oito anos
Sistema de amortização: SAC ou Tabela Price
Taxa de juros: 12% ao ano
Indexador: INPC, IGP-M ou INCC (Índice Nacional do Custo da Construção)

Vantagens: os critérios para concessão do crédito são menos rígidos. Em caso de inadimplência, é mais fácil negociar um imóvel de menor valor com a construtora.

Desvantagens: o preço final é alto e você só recebe a escritura depois de pagar tudo. Se a construtora quebrar, vai ser difícil recuperar o dinheiro.

Retirado de: http://veja.abril.com.br/vejasp/especial_guia_imobiliario/p_130.shtml em 22 de setembro de 2011.
Fontes: Abecip e Alcides Marini

*A situação é hipotética e a soma dos valores não tem significado real porque há oscilação da taxa básica de juros e dos indexadores

Resumo

Os sistemas de amortização são meios matemáticos pelos quais se paga uma dívida contraída, de forma que seja escolhida pelo devedor a maneira mais conveniente para ele em termos de prazos "a perder de vista". Tais sistemas podem ou não ter prazo de carência. Trata-se de um período compreendido entre o prazo de utilização e o pagamento da primeira amortização. Durante esse prazo o devedor só paga os juros.

Atividades de aprendizagem

- Pesquise sobre a taxa SELIC e registre as consequências das variações desta taxa nos sistemas de amortização de empréstimos.

Anotações

Aula 16 – Sistemas de Amortização: sistemas PRICE, SAC e SACRE

Nesta aula estudaremos as três principais tabelas de amortização: SAC (Sistema de Amortização Constante, SACRE (Sistema de Amortização Crescente) e PRICE ou Sistema Francês (tabelas de juro composto pelo seu autor Richard Price).

16.1 Sistema de Amortização Constante - SAC

No sistema de amortização constante (SAC), a parcela de amortização da dívida é calculada tomando por base o total da dívida (saldo devedor) dividido pelo prazo do financiamento, como um percentual fixo da dívida, desta forma é considerado um sistema linear. No SAC, a prestação inicial é um pouco maior que na tabela Price, pois o valor que é pago da dívida (amortização) é maior. Assim, você estará liquidando mais da dívida desde o início do financiamento e pagando menos juros ao longo de contrato.

À medida que a dívida começa a ser amortizada, a parcela dos juros e consequentemente a prestação como um todo tendem a decrescer, uma vez que o próprio saldo devedor se reduz. Com isso, no SAC, o saldo devedor e a sua prestação tendem a decrescer de forma constante desde o início do financiamento e não deixa resíduo desta forma, você estará menos exposto em caso de aumento do indexador do contrato (a TR, TJLP ou INCC) durante o financiamento.

16.2 Sistema de Amortização Crescente - SACRE

A diferença do Sistema de amortização Constante (SAC) para o Sistema de Amortização Crescente (SACRE) é apenas o recalculo, ou seja, um novo cálculo após um determinado período de andamento do contrato. O SACRE é baseado na mesma metodologia do SAC, mas, sempre considerando o prazo remanescente (que falta) para pagar. Assim o recálculo força o crescimento da amortização e a rapidez do pagamento. Ao contrário do que acontece no SAC a parcela de amortização não é constante e sim crescente, permitindo que a dívida seja paga mais rapidamente. O primeiro recálculo acontece com 12 (doze) meses e poderá tornar-se trimestral na hipótese da prestação não estar amortizando (pagando/ quitando) a dívida.

No SACRE, a partir de um determinado período, durante o prazo de financiamento, a prestação tende a cair continuamente até o final do financiamento. Exatamente por isto, o percentual de comprometimento da renda neste tipo de mecanismo de amortização tende a ser mais alto, em cerca de 30%, pois no decorrer do prazo do financiamento as prestações devem cair, e com isto diminui o grau de comprometimento da renda. Atualmente, o SACRE é adotado pela Caixa Econômica Federal nas suas linhas que usam recursos do FGTS, como a Carta de Crédito FGTS Individual.

16.3 A Tabela Price (TP) ou Sistema Francês de Amortização (SFA)

Ao contrário do sistema SAC onde a amortização é igual, na Tabela Price todas as prestações são iguais. Este sistema seria ideal se não existe no financiamento imobiliário a figura do indexador da prestação (índices: TR, TJLP, INCC, CUB, IGPM, etc.).

Para um financiamento de igual valor, a prestação da Tabela Price é sempre menor que a prestação no sistema SAC ou SACRE. Assim, no mecanismo de Cálculo da Tabela Price, a parcela que serve para amortizar a dívida é mais baixa (menor) no início do financiamento e cresce ao longo do contrato. Este financiamento é ideal para pagamento de veículos e crediário em geral que tem prazo curto e a prestação é fixa, mas, pode ser inadequado para financiamentos em longo prazo que contenham um indexador que, na hipótese de acelerar poderá deixar resíduo a ser renegociado no final do contrato.

O Sistema de Amortização Crescente (SACRE) era utilizado somente pela Caixa Econômica Federal. Atualmente outros bancos de capital estrangeiro também aderiram a ele. A diferença básica entre o SACRE e os outros (PRICE e SAC) é o de apresentar o valor da parcela de amortização superior, proporcionando uma redução mais rápida do saldo devedor. Também neste plano a prestação inicial pode comprometer até 30% da renda, enquanto nos outros o comprometimento máximo é 25% e o valor das prestações é decrescente. Na página da Caixa Econômica Federal você encontra um simulador de financiamento habitacional: http://www.caixa.gov.br/habitacao/index.asp

Na Tabela Price as prestações podem aumentam durante todo o prazo de financiamento. Nesse sistema, você estará mais exposto a um aumento nos indexadores provocados por um aumento da inflação e não temos bola de cristal para adivinhar o que ocorrerá daqui a vinte anos mesmo com a pretensa estabilidade.

Apesar deste risco de aumento nos indexadores existir nos demais mecanismos de amortização, ele é mais atenuado no sistema SAC ou SACRE já que o saldo devedor decresce mais rapidamente. Exatamente por isso, as instituições que adotam a Tabela Price nos financiamentos imobiliários tendem a aceitar um percentual menor de comprometimento da renda do que o aceito no SAC ou SACRE.

16.4 Sistemas de Amortização – Formulário

16.4.1 Sistema de amortização PRICE

As principais características deste sistema são:

- Prestações constantes
- Amortizações crescentes
- Juros decrescentes

Para calcular as prestações, utilizaremos a seguinte fórmula:

$$\mathbf{PMT = \frac{PV.\ (1+i)^n . I}{(1+i)^n - 1}}$$

Exemplo:

1. Elaborar a planilha Price de um empréstimo de R$ 120.000,00, a taxa de 5% a.m em três prestações iguais e consecutivas.

$$PMT = \frac{120000\ \ (1+0{,}05)^3 \times 0{,}05}{(1+0{,}05)^3 - 1}$$

PMT = 120000 x (0,05788/0,15763)

PMT = 120000 x 0,3672 = R$ 44.065,00

n	PMT	Juros	Amortização	Saldo Devedor
0				120.000,00
1	44.065,00	6.000,00	38.065,00	81.935,00
2	44.065,00	4.096,75	39.968,25	41.966,75
3	44.065,00	2.098,38	41.996,66	0

2. Considerar um empréstimo de R$ 100.000,00 tomado por uma empresa, para ser liquidado em três vezes iguais, com taxa de juros de 4,5% ao mês. Elaborar a planilha PRICE.

n	PMT	Juros	Amortização	Saldo Devedor
0				100.000,00
1				
2				
3				

16.4.2 Sistema de amortização constante – SAC

Este sistema é muito utilizado em créditos imobiliários. As principais características deste sistema são:

- Amortizações constantes
- Juros decrescentes
- Parcelas decrescentes.
-

Para calcular as amortizações, basta dividir o valor da dívida pelo número de prestações.

$$\textbf{Amortização} = \frac{\textbf{PV}}{\textbf{n}}$$

Exemplo:

1. Considerar um financiamento de R$ 50.000,00 a taxa de 4,8% a.m, para ser quitado em cinco prestações no sistema SAC.

Amortização = 50.000/5 = R$ 10.000,00

n	Saldo Devedor	Amortização	Juros	PMT
0	50.000,00			
1	40.000,00	10.000,00	2.400,00	12.400,00
2	30.000,00	10.000,00	1.920,00	11.920,00
3	20.000,00	10.000,00	1.440,00	11.440,00
4	10.000,00	10.000,00	960,00	10.960,00
5	0	10.000,00	480,00	10.480,00

Atividade prática

1. Elaborar a planilha Price, para um empréstimo de R$ 85.000,00 a uma taxa de 6% a.m em 10 vezes.

2. Elaborar a planilha SAC, para um empréstimo de R$ 98.000,00 a uma taxa de 5,5% a.m em oito vezes.

Tabela 16.1: Price

Sistema Francês de Amortização	SACRE - Sistema de Amortização Crescente	SAC - Sistema de Amortização Constante
• prestações fixas a cada 12 meses • limite de até 25% da renda familiar • financiamento em parcelas iguais • sem residual reajuste feito durante o financiamento • composto por amortização de juros • juros compostos • juros maiores que por SACRE e SAC • valor de financiamento maior	• limite de até 30% da renda familiar • prestações fixas a cada 12 meses • recomendável se puder desembolsar mais no começo • amortização é mais rápida diminuindo o valor dos juros	• prestações decrescentes com reajuste a cada 12 meses • sistema decrescente, já que desde o começo há a amortização • os juros são calculados sobre o residual, como é amortizado, os juros caem assim como a mensalidade final • o valor das mensalidades decresce
Para um profissional em ascensão, com grandes chances de promoções ou aumento de salário, em função de seu planejamento profissional, a Price é uma boa saída.	Para profissional estabilizado, sem muitas possibilidades de promoções ou aumentos salariais nos próximos anos e puder pagar um valor mais elevado na primeira prestação, o indicado seria a SAC ou a SACRE, uma vez qye as mensalidades vão diminuindo ao longo dos anos. Comprometimento da renda ideal, segundo os especialistas, é de 30%.	
Vários contratos firmados até 28/07/93 tem valor residual a ser pago pelo Fundo de Compensação Salarial (FCVS).		
A melhor forma de se livrar de financiamentos, seus reajustes, indexadores e correção monetária, ainda é comprando à vista.		
Para tirar suas dúvidas, pergunte ao seu gerente financeiro ou a alguém que tenha imóvel financiado.		

Fonte: Elaborado pelo autor

Agora vamos analisar o seguinte depoimento:

> “Entendo a Tabela "Price" como uma das mais práticas e harmônicas aplicações dos conhecimentos da engenharia econômica para o bem estar do cidadão. Lembro-me bem quando comecei a estudar matemática no ginásio (5ª série do primeiro grau de hoje). Não vislumbrava as aplicações para tudo aquilo. O mesmo aconteceu no científico. Por

incrível que pareça na faculdade. Deparei–me com a Tabela "Price" quando cursava o primeiro ano da faculdade e já trabalhava. O caso que apareceu em minhas mãos foi o início de uma "paixão", que dura até hoje. Conviver com as nuanças do "Valor do Dinheiro no Tempo" simplesmente é um alimento para novos desafios. A Tabela "Price" é uma das filhas da Matemática Financeira ou Engenharia Econômica. Ela está no nosso cotidiano e às vezes passa despercebida. O fato de pensarmos em comprar alguma coisa a prazo ou a vista já envolve a Tabela "Price". Sei que os vendedores das lojas de eletrodomésticos nunca, na sua grande maioria, ouviram falar dessa genialidade, mas a usam constantemente quando fazem contas de valores de prestações usando "fatores" que lhes foram fornecidos para lhes facilitar a vida."

Retirado de http://www.portaldefinancas.com/indextp.htm, acessado em 27/10/09.

Um financiamento de 120 meses para um imóvel com valor de R$ 50.000,00; taxa de juros de 12% a.a e TR (taxa referencial de juros obrigatória por lei) mensal de 0,2149%.

Sistema de amortização adotado: SACRE (Sistema de Amortização Crescente)
Fórmula: Prestação = saldo devedor x {(1/n) + (taxa juros mês/100)}

Sendo assim:
Prestação = 50.000 x { (1/120) + (0,01) } = 916,67

Assim temos o valor da primeira parcela. Consideramos n como sendo o período total do financiamento menos o período já pago. Neste exemplo, para a primeira parcela n é igual a 120. Para a 13ª parcela n será igual a 108 (120 – 12).

O saldo devedor do financiamento é corrigido mensalmente pela TR (0,21490%). Desta forma, primeiro corrige-se o saldo devedor, depois diminui a parcela da amortização, e assim, terá o saldo devedor corrigido.

Cálculo do valor mensal dos juros a pagar:
Valor juros mensal = taxa juros mês x saldo devedor mês x TR

Cálculo do valor da amortização do seu financiamento
Valor amortização = prestação - valor juros mês

Sendo assim temos a seguinte tabela:

n	Amortização	Juros	Prestação	Saldo Devedor
0	-	-	-	50000,00
1	809,22	107,45	916,67	49190,78
2	810,96	105,71	916,67	48379,82

Passados os 12 primeiros meses, o saldo devedor será corrigido, gerando uma nova prestação que durará por mais 12 meses.

Resumo

Nesta aula revisitamos os principais sistemas de amortização para entender qual deles é melhor para a compra de um imóvel em longo prazo junto às financiadoras de imóveis.

Atividades de aprendizagem

- Faça a simulação para o valor de um financiamento de R$ 60.000,00 com as mesmas taxas e período de 10 meses para preencher a tabela, formando uma nova com o sistema SACRE.

Aula 17 – Introdução à Estatística: Médias

Nesta aula você irá aprender sobre geometria, em especial sobre os ângulos e o modo como representar um ângulo muito especial: o ângulo reto ou ângulo de 90º.

O homem é um ser curioso, e como tal, procura investigar sobre tudo aquilo que o cerca. Investigação sugere pesquisa, busca de informações e análise de dados e tudo isto faz pensar em Estatística. Fique ligado quanto aos conceitos passados nessa aula.

O relacionamento da Estatística com as demais ciências é cada vez mais intenso e importante. Veja-se, por exemplo, que a estatística auxilia a Genética, nas questões de hereditariedade; é valiosa na Economia, na análise da produtividade, da rentabilidade, nos estudos de viabilidade, etc. É básica para as Ciências Sociais, nas pesquisas socioeconômicas; é de aplicação intensa na Engenharia Industrial, no controle de qualidade, na comparação de fabricações, etc. É indispensável à Administração, à Programação, à Medicina, à Psicologia, à História, e, de forma direta ou indireta, às demais atividades.

17.1 O que é estatística?

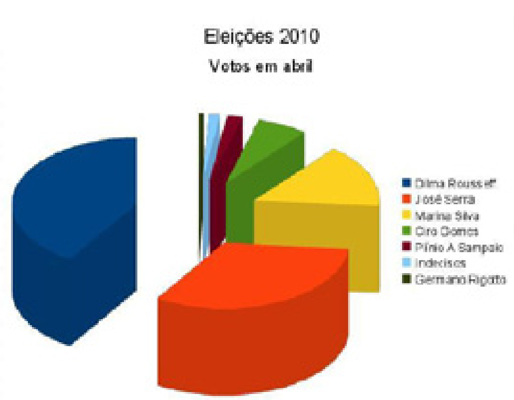


Figura 17.1: Gráfico
Fonte: http://cantinhodopinguim.blogspot.com

Figura 17. 2: Pessoas
Fonte: http://govirtualoffice.com

> Estatística é um conjunto de métodos e processos quantitativos que serve para estudar e medir os fenômenos coletivos.
>
> (Dugé de Bernonville)

Em outras palavras, **Estatística** é a ciência que se preocupa com a coleta, a organização, descrição (apresentação), análise e interpretação de dados experimentais e tem como objetivo fundamental o estudo de uma população. Este estudo pode ser feito de duas maneiras: investigando todos os elementos da população, ou por amostragem, ou seja, selecionando alguns elementos da população.

Na maior parte das vezes em que os dados estatísticos são analisados, procuramos obter um valor para representar um conjunto de dados. Este valor deve sintetizar, da melhor maneira possível, o comportamento do conjunto do qual ele é originário. Nem sempre os dados estudados têm um bom comportamento, isto pode fazer com que um único valor possa representá-lo (ou não) perante o grupo.

As medidas de posição mais importantes são as medidas de tendência central, que recebem tal denominação pelo fato de os dados observados tenderem, em geral, a se agrupar em torno dos valores centrais.

Dentre as medidas de tendência central, destacam-se as seguintes: **Médias**, **Moda** e **Mediana**.

Cada uma com um significado diferenciado, porém tendo como serventia representar um conjunto de dados.

17. 2 Médias

17.2.1 Média Aritmética Simples

Para se obter a média aritmética simples de um conjunto de dados, devemos dividir a soma dos valores de todos os dados do conjunto pela quantidade deles.

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{N} \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{\sum x_i}{N}$$

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{N} \quad \text{ou} \quad \bar{X} = \frac{\sum x_i}{N}$$

Onde: x_i = são os valores que a variável x assume
n = o número de valores
$\overline{X}$ = é a média aritmética da amostra
μ = é a média aritmética da população

Exemplo:
Sabendo-se que as vendas diárias da empresa A, durante uma semana, foram de 10, 14, 13, 15, 16, 18 e 12 unidades. Determinar a média de vendas nesta semana feitas pela empresa A.

Para obter a média aritmética simples das vendas, faremos o seguinte cálculo:

$x_1 = 10$, $x_2 = 14$, $x_3 = 13$, $x_4 = 15$, $x_5 = 16$, $x_6 = 18$ e $x_7 = 12$ e $n = 7$, logo:

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{14 + 13 + 15 + 16 + 18 + 12}{7} = \frac{98}{7} = 14$$

17.2.2 Média Aritmética Ponderada

É uma média aritmética na qual será atribuído um peso a cada valor da série.

$$\overline{X}_p = \frac{\sum x_i \cdot p_i}{\sum p_i}$$

Exemplo:
O capital da empresa está sendo formado pelos acionistas, por financiamentos e por debêntures. Cada tipo tem um custo diferente para a empresa, definido pela sua taxa de juros anual. Calcule a taxa de juros média do capital da empresa, considerando os dados apresentados na tabela seguinte:

Capital da Empresa	Participação	Taxa de Juros
Acionista	R$ 1.000.000,00	12 %
Financiamento	R$ 600.000,00	8 %
Debêntures	R$ 400.000,00	14 %

A taxa de juros média é calculada pela seguinte relação:

$$\overline{X}_p = \frac{x_1.p_1 + x_2.p_2 + x_3.p_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

$$\bar{X}_p = \frac{12\%.1.000.000 + 8\%.600.000 + 14\%.400.000}{1.000.000 + 600.000 + 400.000} = 11{,}20\%$$

17.2.3 Média aritmética para dados agrupados sem intervalos de classes

As frequências são as quantidades de vezes que a variável ocorre na coleta de dados, elas funcionam como fatores de ponderação, o que nos leva a calcular uma média aritmética ponderada.

$$\mu = \frac{\sum x_i.f_i}{N} \quad \text{(população)} \qquad \bar{X} = \frac{\sum x_i.f_i}{N} \quad \text{(amostra)}$$

Exemplo:

Após ter realizado um trabalho bimestral, numa turma de Estatística, o professor efetuou levantamento das notas obtidas pelos alunos. Observou a seguinte distribuição e calculou a média de sua turma:

Notas dos alunos - x_i	Número de alunos - f_i	$x_i f_i$
1	1	1
2	3	6
3	5	15
4	1	4
Total Σ	n = 10	26

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i.f_i}{n} = \frac{26}{10} = 2{,}6$$

17.2.4 Média aritmética para dados agrupados com intervalos de classes

Neste caso, convencionamos que todos os valores incluídos em um determinado intervalo de classe coincidem com o seu ponto médio, e determinamos a média aritmética ponderada por meio das seguintes fórmulas:

$$\mu = \frac{\sum x_i.f_i}{n}, \text{ onde } x_i = \frac{l_i + l_s}{2} \quad \text{(população)}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i.f_i}{n}, \text{ onde } x_i = \frac{l_i + l_s}{2} \quad \text{(amostra)}$$

Exemplo:

Determine a renda média familiar, de acordo com os dados da tabela:

Classes – Renda familiar	x_i	f_i - Número de famílias	$x_i f_i$
2 ⊢ 4	3	5	15
4 ⊢ 6	5	10	50
6 ⊢ 8	7	14	98
8 ⊢ 10	9	8	72
10 ⊢ 12	11	3	33
Total Σ		n = 40	268

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i . f_i}{n} = \frac{268}{40} = 6{,}7$$

Anotações

Aula 18 – Medidas de posição: moda e mediana

Nesta aula abordaremos dois tipos de medida de tendência central (posição): a Moda e a Mediana. Comparando as duas com outros tipos de medidas, a mediana tem caráter mais geométrico e mais simetria.

Define-se **moda** como o valor que ocorre com maior frequência em conjunto de dados. Tal e qual aparece no senso comum a moda "vai e volta", e várias vezes se repete.

Figura 18.1: Moda
Fonte: Banco de imagens DI

18.1 Moda (mo) – para dados não agrupados

Primeiramente os dados devem ser ordenados (colocados em Rol) para, em seguida, observar o valor que tem maior frequência.

Exemplo:
Calcular a moda dos seguintes conjuntos de dados:

- X = (4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8) → Mo = 6 (0 valor mais frequente)

Esse conjunto é unimodal, pois apresenta apenas uma moda.

- $Y = (1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6) \rightarrow Mo = 2$ e $Mo = 4$ (valores mais frequentes)

Esse conjunto é bimodal, pois apresenta duas modas.

- $Z = (1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5) \rightarrow Mo = 2$, $Mo = 3$ e $Mo = 4$ (valores mais frequentes)

Esse conjunto é plurimodal, pois apresenta mais de duas modas.

- $W = (1, 2, 3, 4, 5, 6) \rightarrow$ Esse conjunto é amodal porque não apresenta um valor predominante, ou seja, não tem moda.

Observação:
A **moda** é utilizada quando se deseja obter uma medida rápida e aproximada de posição, ou quando a medida de posição deva ser o valor mais típico da distribuição, é uma medida pouco utilizada.

Já a **média aritmética** é a medida de posição que possui a maior confiabilidade numérica, além de ser a mais intuitiva do ponto de vista matemático.

18.2 Mediana (Md)

Esta tem caráter mais geométrico, de simetria, em comparação às demais medidas.

É uma medida de posição (Medida de Tendência Central) cujo valor divide um conjunto de dados em duas partes iguais. Portanto, a mediana se localiza no centro de um conjunto de números ordenados segundo uma ordem de grandeza.

Para se obter o elemento mediano de uma série deveremos seguir os seguintes procedimentos:

- Se **N** (número de elementos do conjunto) for ímpar a mediana é o termo de ordem **P** dado pela razão:

$$P = \frac{N + 1}{2}$$

- Se **N** (número de elementos do conjunto) for **par** a mediana é a média aritmética dos termos de ordem, em um primeiro passo de **P1** (média aritmética simples) e, em seguida, pela razão **P2** (termo subsequente da ordem P):

$$\mathbf{P_1 = \frac{N}{2}} \quad \text{e} \quad \mathbf{P_2 = \frac{N}{2} + 1}$$

Exemplos:

1. Determine o valor da mediana da série que é composta dos seguintes elementos: 56, 58, 62, 65 e 90.

$N = 5$ (ímpar) $\rightarrow P = \frac{N+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3 \rightarrow 3^{o}$ elemento $\rightarrow Md = 62$

2. Em uma pesquisa realizada a respeito de erros por folha, cometidos por digitadores, revelou as seguintes quantidades: 12, 12, 13, 13, 15, 16, 18 e 20. Determinar a quantidade mediana de falhas.

$N = 8$ (par) $\rightarrow P_1 = \frac{N}{2} = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow 4^{o}$ elemento $\rightarrow Md = 13$

$P_2 = \frac{N}{2} + 1 = \frac{8}{2} + 1 = 5 \rightarrow 5^{o}$ elemento $\rightarrow Md = 15$

Logo a mediana será: $Md = \frac{13 + 15}{2} = \frac{28}{2} = 14$

Ou ainda, de modo simplista, dividimos os dados em: limites à esquerda e à direita, destacando os valores centrais.

Destaque: o procedimento seguinte é para uma quantidade par de elementos.

1º passo: organizamos o Rol:
Rol: 12, 12, 13, 13, 15, 16, 18, 20.

2º passo: destacamos os valores centrais (metade à esquerda, metade à direita):
12, 12, $\boxed{13, 13,}$ 15, 16, 18, 20

3º passo: efetuamos a média aritmética:

$$\frac{13 + 15}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

18.3 Comparação entre média, mediana e moda

No quadro seguinte apresentaremos um quadro comparativo das vantagens e desvantagens dos diferentes tipos de medidas de posição.

Medida	Definição	Vantagens	Desvantagens
Média	Centro da distribuição de frequencias	1. reflete cada valor 2. possui propriedades matemáticas atraentes	1. é afetada por valores extremos
Mediana	Metade dos valores são maiores, metade menores	1. menos sensível a valores extremos do que a média	1. difícil de determinar para grande quantidade de dados
Moda	Valor mais frequente	1. valor "típico"; maior quantidade de valores concentrados neste ponto	1. não se presta a análise matemática 2. pode não ter moda para certos conjuntos de dados

Figura 18.1: Comparação entre média, mediana e moda
Fonte: elaborado pelo autor.

Resumo

Média aritmética simples: (Referente à população)

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{N} \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{\sum x_i}{N}$$

Média aritmética simples: (Referente à amostra)

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{N} \quad \text{ou} \quad \bar{X} = \frac{\sum x_i}{N}$$

Média aritmética ponderada:

$$\bar{X}_p = \frac{\sum x_i \cdot p_i}{\sum p_i}$$

Média aritmética para dados agrupados sem intervalos de classes:

$$\mu = \frac{\sum x_i.f_i}{N}$$ (população) $$\bar{X} = \frac{\sum x_i.f_i}{N}$$ (amostra)

Média aritmética para dados agrupados com intervalos de classes:

$$\mu = \frac{\sum x_i.f_i}{n}, \text{ onde } x_i = \frac{l_i + l_s}{2}$$ (população)

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i.f_i}{n}, \text{ onde } x_i = \frac{l_i + l_s}{2}$$ (amostra)

Moda: é o valor que se repete o maior número de vezes, entre os dados obtidos

Mediana (Md): representa o valor central entre os dados obtidos, estando esses dados em ordem crescente ou decrescente.

Para obter o elemento mediano devemos considerar dois casos:

1º caso: se **N** for **ímpar** a mediana é o termo de ordem **P** dado pela razão:

$$P = \frac{N + 1}{2}$$

2º caso: se **N** for **par** a mediana é a média aritmética dos termos de ordem **P** dado pela razão:

$$P_1 = \frac{N}{2} \quad \text{e} \quad P_2 = \frac{N}{2} + 1$$

Aula 19 – Estatística: séries e tabelas

Nesta aula serão apresentados os tipos mais usuais de representação dos dados estatísticos: as tabelas.

Fique atento aos conceitos dessas aulas, pois por meio deles, você pode compreender melhor a apresentação das tabelas e gráficos encontrados em jornais, revistas, e assim analisar e interpretar as informações transmitidas.

A apresentação tabular é uma apresentação numérica dos dados. Consiste em dispor os dados em linhas e colunas distribuídos de modo ordenado, segundo algumas regras práticas ditadas pelo Conselho Nacional de Estatística e pelo IBGE.

As tabelas têm a vantagem de conseguir expor, sinteticamente e em um só local, os resultados sobre determinado assunto, de modo a se obter uma visão global mais rápida daquilo que se pretende analisar.

Essa integração de valores que temos nas tabelas, nos permite ainda a utilização de representações gráficas, que normalmente é uma forma mais útil e elegante de demonstrar as características que serão analisadas.

19.1 Tabelas

É um quadro (sem que se fechem por completo as linhas e colunas, pois do contrário seria uma grade), que resume um conjunto de observações. Uma tabela compõe-se de:

- **Corpo** – conjunto de linhas e colunas que contêm informações sobre a variável em estudo

- **Cabeçalho** – parte superior da tabela que especifica o conteúdo das colunas

- **Coluna Indicadora** – parte da tabela que especifica o conteúdo das linhas

- **Casa ou Célula** – espaço destinado a um só número

- **Título** – conjunto de informações, as mais completas possíveis, respondendo às perguntas: O quê? Quando? Onde? localizado no topo da tabela

- **Fonte** – indicação da entidade responsável pelo fornecimento dos dados ou pela sua elaboração.

Título

Cabeçalho

Corpo

Rodapé com a fonte

TABELA 11: evolução da renda dos empreendedores brasileiros 2000-2003

FAIXA DE RENDA	2000 (%)	2001 (%)	2002 (%)	2003 (%)
Menos de 3 SM	30	39	43	53
De 3 a 6 SM	30	31	34	22
Mais de 6 a 9 SM	14	12	11	8
Mais de 9 a 15 SM	12	8	9	8
Mais de 15 SM	9	11	3	6
Não sabe	1	3	1	1
Recusou	4	6	2	2
Total	100	100	100	100

Fonte: Pesquisas GEM 2000 - 2003

Casa ou Célula

Coluna indicadora
(por convenção não tem linhas em destaque fechando a tabela)

Tabela 19.1: Tabela
Fonte: elaborado pelo autor.

De acordo com a Resolução 886 da Fundação IBGE, nas casas ou células, devemos colocar:

1) um traço horizontal (___) quando o valor é zero, não só quanto a natureza das coisas, como quanto ao resultado do inquérito;
2) três pontos (...) quando não temos os dados;
3) um ponto de interrogação (?) quando temos dúvida quanto a exatidão de determinado valor;
4) zero (0) quando o valor é muito pequeno para ser expresso pela unidade utilizada. Se os valores são expressos em numerais decimais, precisamos acrescentar a parte decimal um número correspondente de zeros (0,0; 0,00; 0,00; ...).

19.2 Séries estatísticas

Denomina-se série estatística toda tabela que apresenta a distribuição de um conjunto de dados estatísticos em função da **época**, do **local**, ou da **espécie** (fenômeno).

Numa série estatística observa-se a existência de três elementos ou fatores: o **tempo**, o **espaço** e a **espécie**. Conforme varie um desses elementos, a série estatística classifica-se em **temporal**, **geográfica** e **específica**.

19.2.1 Série temporal, histórica ou cronológica

É a série cujos dados estão em correspondência com o tempo, ou seja, variam com o tempo.

Exemplo:

Tabela 19.2: Preço do artigo "Y" no atacado na cidade "X"

ANOS	PREÇO MÉDIO EM REAIS
2003	2,43
2004	2,54
2005	3,01
2006	2,99
2007	2,83

Fonte: Dados Fictícios (imagem do autor)

19.2.2 Série geográfica, territorial ou de localidade

É a série cujos dados estão em correspondência com a região geográfica, ou seja, o elemento variável é o fator geográfico (a região).

Exemplo:

Tabela 19.3: Número de assaltos na cidade "X" em 2006

REGIÃO	NÚMERO DE ASSALTOS
Centro	74
Zona Sul	54
Zona Norte	31
Zona Leste	29
Zona Oeste	44

Fonte: Dados Fictícios (imagem do autor)

19.2.3 Série específica ou categórica

É a série cujos dados estão em correspondência com a espécie, ou seja, variam com o fenômeno.

Exemplo:

Tabela 19.4 - Número de candidatos ao vestibular da Universidade "X" em 2006

ÁREA OFERTADA	NÚMERO DE CANDIDATOS
Ciências Sociais	2086
Aplicadas	1065
Ciências Exatas	1874
Ciências Humanas	1102
Ciências Biológicas	1902
Ciências Tecnológicas	29

Fonte: Dados Fictícios (imagem do autor)

19.2.4 Séries mistas

As combinações entre as séries anteriores constituem novas séries que são denominadas séries compostas ou mistas e são apresentadas em tabelas de dupla entrada.

Exemplo:

Tabela 19.5: Número de alunos matriculados nas escolas particulares na cidade "X"

BAIRROS	2005	2006	2007
BAIRRO – A	2894	3454	2989
BAIRRO – B	7075	9876	6543
BAIRRO – C	1099	3218	2100
BAIRRO – D	4333	3455	3543
BAIRRO - E	2976	1765	4098

Fonte: Dados Fictícios (imagem do autor)

Anotações

Aula 20 – Estatística: gráficos

Nesta aula veremos os tipos mais específicos de gráficos utilizados em pesquisas estatísticas, suas funções, vantagens e desvantagens.

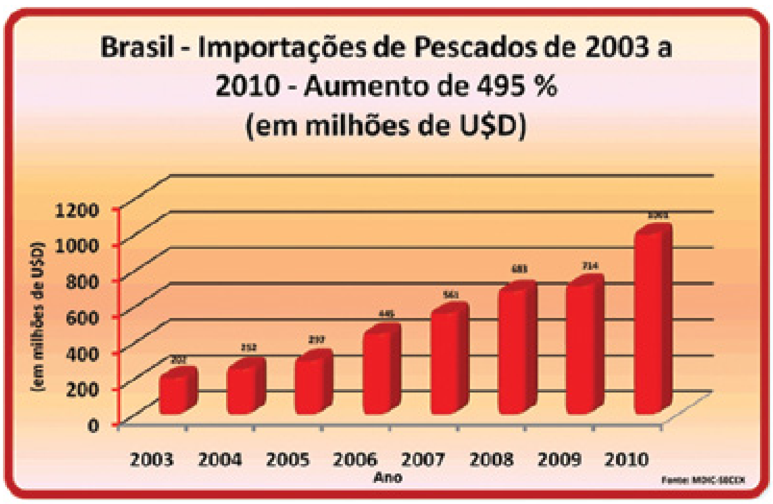


Figura 20.1: Gráfico de pesca e aquicultura
Fonte: http://mybelojardim.com

A apresentação gráfica é um complemento importante da apresentação tabular (as tabelas). A vantagem de um gráfico sobre a tabela está em possibilitar uma rápida impressão visual da distribuição dos valores ou das frequências observadas. Os gráficos propiciam uma ideia inicial mais satisfatória da concentração e dispersão dos valores, uma vez que através deles os dados estatísticos se apresentam em termos de grandezas visualmente interpretáveis.

A representação gráfica de um fenômeno deve obedecer certos requisitos fundamentais, para ser realmente útil:

- **simplicidade** - o gráfico deve ser destituído de detalhes e traços desnecessários;

- **clareza** - o gráfico deve possuir uma correta interpretação dos valores representativos do fenômeno em estudo;

- **veracidade** - o gráfico deve expressar a verdade sobre o fenômeno em estudo.

20.1 Principais tipos de gráficos

20.1.1 Gráficos em linhas

São usados para representar séries temporais, principalmente quando a série cobre um grande número de períodos de tempo e o mais relevante é o "sobe e desce" (variação dos índices, taxas, coeficientes representados no eixo das ordenadas (eixo vertical).

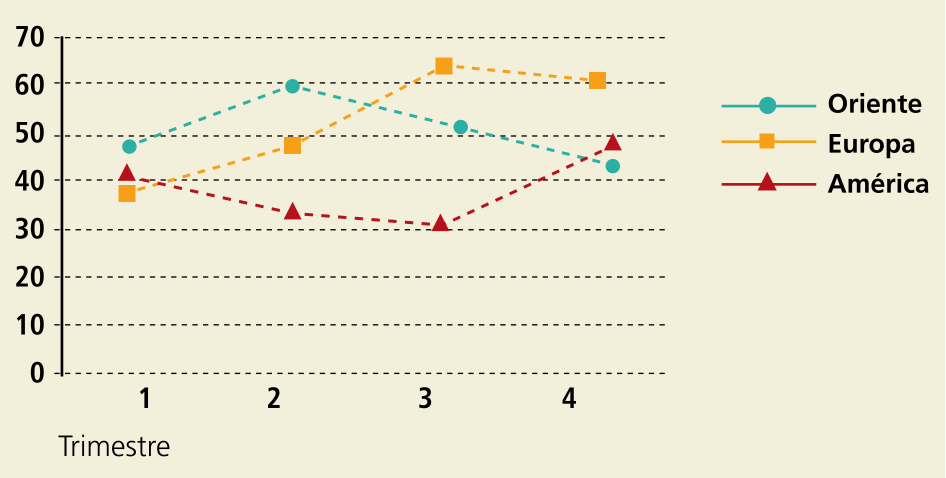


Figura 20.2: Gráfico em linha
Fonte: elaborada pelo autor

20.1.2 Gráficos em colunas

É a representação de uma série estatística através de retângulos, dispostos em colunas (na vertical). Este tipo de gráfico representa praticamente qualquer série estatística quando se deseja relacionar grandes quantidades de dados e as respectivas variações de crescimento e/ou decrescimento dos dados apresentados.

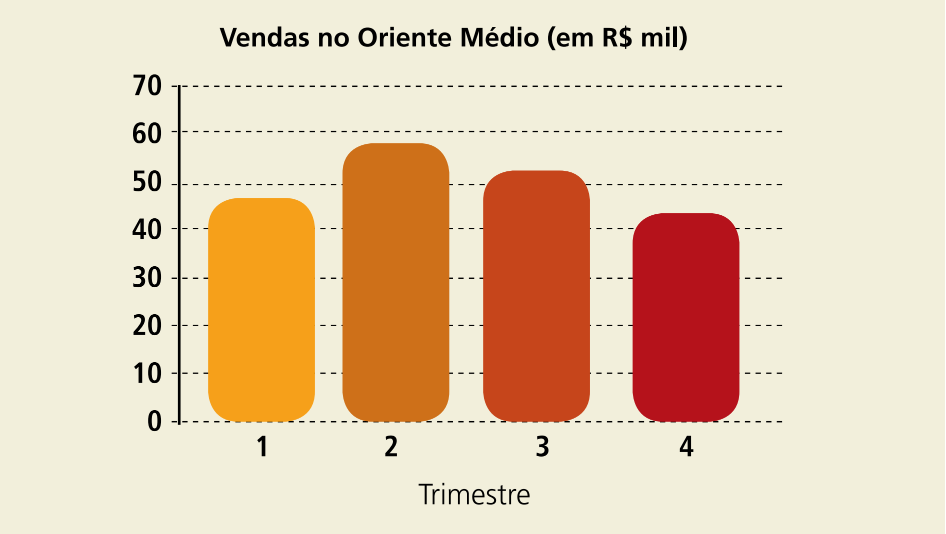


Figura 20.3: Gráfico em colunas
Fonte: elaborada pelo autor

As regras para a construção são as mesmas do gráfico em linhas. As bases das colunas são iguais e as alturas são proporcionais aos respectivos dados. O espaço entre as colunas pode variar de 1/3 a 2/3 do tamanho da base da coluna, mas depende do tipo de dado coletado e do autor adotado. Por hora adotaremos a seguinte regra: análise do tipo de variável coletada, para isso utilizaremos o bom senso.

Por exemplo, se os dados forem variáveis do tipo contínuo, não faz sentido apresentar as colunas separadas, pois os dados serão contínuos e, por consequência as colunas serão apresentadas de modo contínuo.

No caso da figura 20.2 as colunas estão separadas. A justificativa para isso é que a variável preço "em R$ mil" não foi apresentada de modo contínuo na pesquisa, ou seja, no 1° trimestre as vendas foram de mais de R$ 40 mil e ponto! No 2° trimestre (não importa o dia exato em que se encerrou a coleta de dados do 1° trimestre) iniciou-se nova coleta que é independente da primeira.

20.1.3 Gráficos em barras

É representado por retângulos dispostos horizontalmente, prevalecendo os mesmos critérios adotados na elaboração de gráfico em coluna, porém é mais adequado quando se deseja destacar a variação (máximos e mínimos) de duas, até três variáveis do eixo vertical.

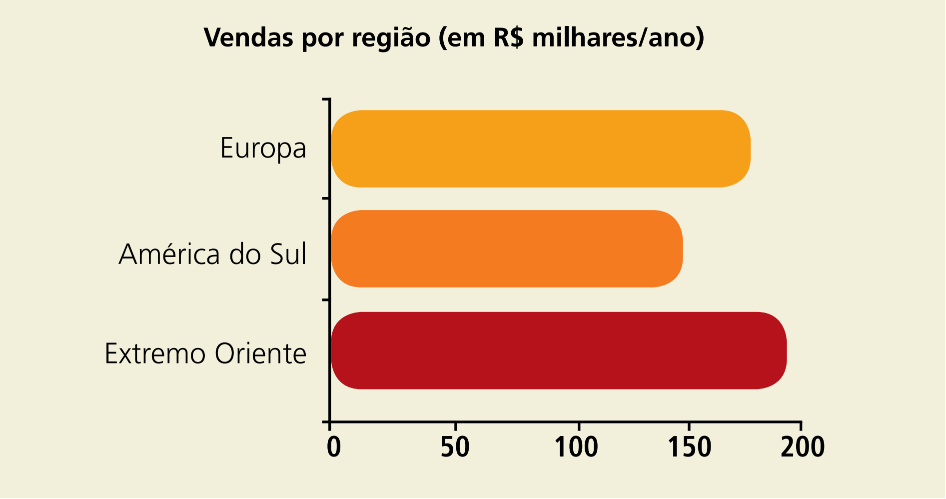


Figura 20.4: Gráfico em barras
Fonte: elaborada pelo autor

4.1.4 Gráfico em setores

É a representação gráfica de uma série estatística em um círculo de raio qualquer, por meio de setores com ângulos centrais proporcionais às ocorrências. É utilizado quando se pretende comparar cada valor da série com o total.

O total da série corresponde a 360° (total de graus de um arco de circunferência). O gráfico em setores representa valores absolutos ou porcentagens complementares.

As séries geográficas, específicas e as categorias em nível nominal são mais representadas em gráficos de setores, desde que não apresentem muitas parcelas (no máximo sete).

Cada parcela componente do total será expressa em graus, calculada através de uma proporção simples (a famosa "regra de três"):

Total → 360°
Parte → x°

O símbolo "→" pode ser lido como: "está para".

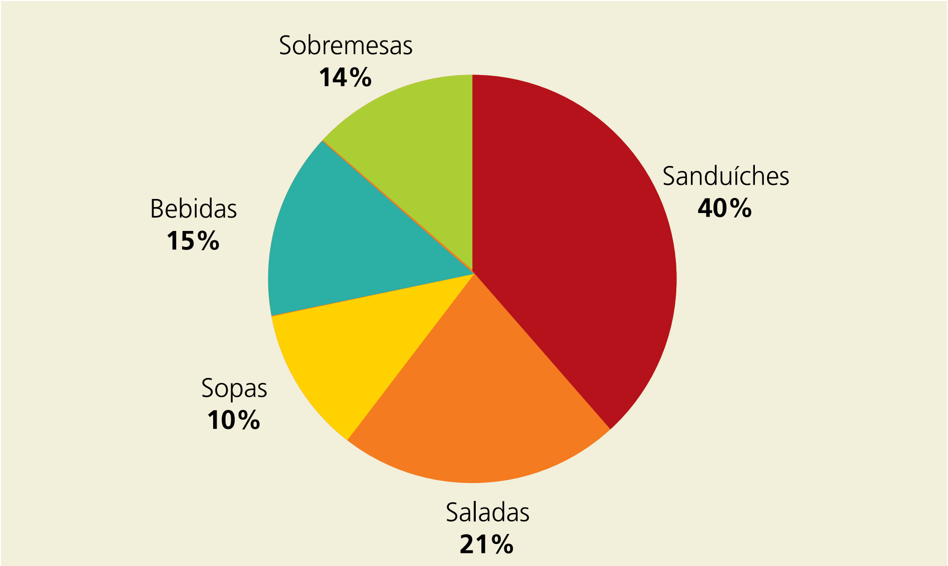
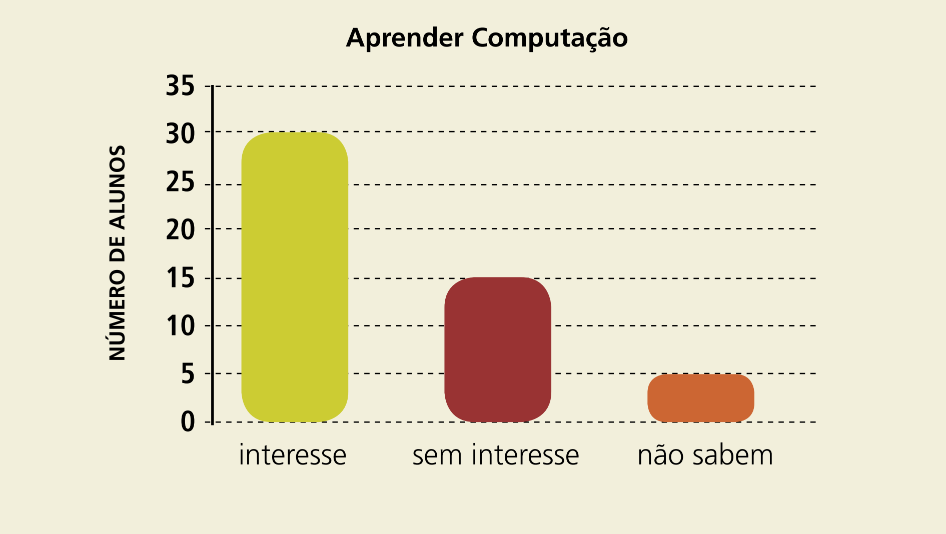


Figura 20.5: Gráfico em setores
Fonte: elaborada pelo autor

Exemplo Prático: Em uma amostra com alunos do Ensino Profissionalizante, quando perguntados sobre o interesse em aprender computação, a resposta foi a seguinte: 30 manifestaram interesse, 15 não demonstraram interesse e 5 não sabem.

Pede-se:
Representar os dados obtidos graficamente:



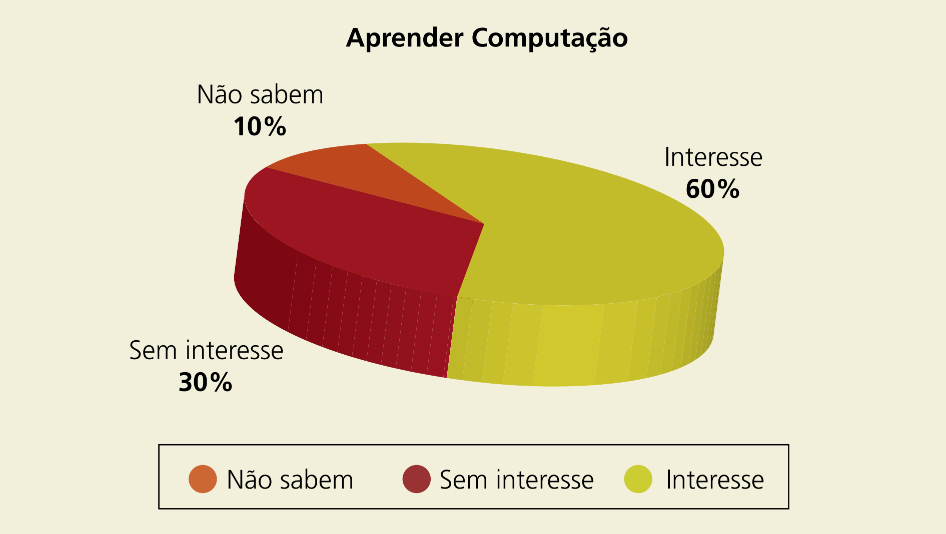
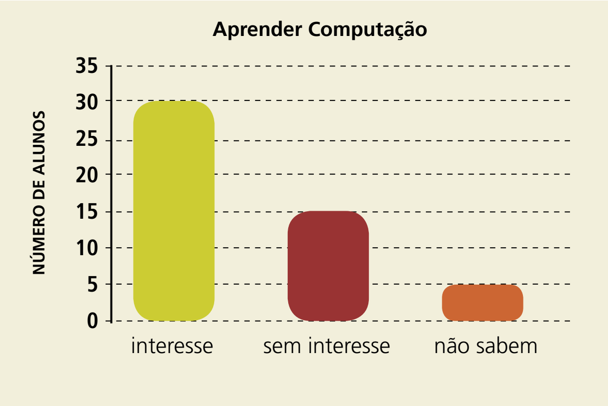
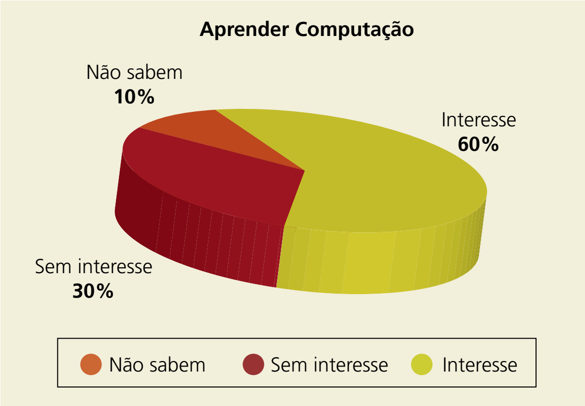


Figura 20.6: Gráfico em setores
Fonte: Dados fictícios (imagem elaborada pelo autor)

a) Comparação dos Gráficos:





Observe que colocamos lado a lado os dois gráficos para obter a melhor representação dos dados, seja para fins acadêmicos ou de apresentação profissional. Em síntese, ter várias opções de gráficos é desejável para poder estabelecer melhor a comparação de um fenômeno e decidir sobre a melhor e mais impactante apresentação gráfica.

Para refletir:

Qual dos dois gráficos representou melhor os dados obtidos na pesquisa?

Resumo

Tabela é um quadro que resume um conjunto de observações.

Série estatística: é toda a tabela que apresenta a distribuição de um conjunto de dados estatísticos em função da época, local, ou da espécie.

As séries podem ser divididas em **(a)** temporal, histórica ou cronológica; **(b)** geométrica, territorial ou de localidade; e **(c)** específica ou categórica

Gráfico é um complemento da tabela e deve apresentar simplicidade, clareza, veracidade. Os gráficos podem ser classificados em **curvas ou linhas**; **colunas**; **barras**, e **setores** (ou **gráfico de pizza**).

Referências

MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila C. Progressões e Matemática Financeira. SBM, Rio de Janeiro, 4 a. edição, 2001.

BAUER, Udibert Reinoldo – Matemática financeira fundamental. Ed. Atlas. SP 2003.

BRUNI, Adriano Leal & FAMÁ, Rubens. Matemática Financeira: com HP 12c e Excel. São Paulo: Atlas, 2002

CRESPO, Antônio Arnot. Matemática Comercial e Financeira Fácil. 13a. ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

BOYER, Carl B. (1996) - História da Matemática. Editora Edgard Blücher

CARVALHO B. L. Etnomatemática: Alguns Conhecimentos Matemáticos Usados nas Práticas Profissionais de Um Pedreiro e Um Eletricista. Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática, 2008.

CARVALHO, B. A. Desenho Geométrico. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1993.

COLE, K. C.. O Universo e a Xícara de Chá. São Paulo: Record, 2006. 294p.

DANTE, L.R. Matemática: Contexto de Aplicações. São Paulo: Editora Ática, 1999.

DEVLIN, K. Matemática – a ciência dos padrões. Porto: Porto editora, 2002.

EVES, Howard. (1995) - Introdução à História da Matemática. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP. Editora da Unicamp.

GIONGO, Affonso R. Curso de Desenho Geométrico. 32a ed, São Paulo: Nobel, 1989.

IFRAH Georges (1985) - Os números: A história de uma grande invenção, Editora Globo, 3a.edição

LIVIO, Mario. Razão áurea: a história do phi. São Paulo: Record, 2006. 336p.

MEDEIROS JUNIOR, Roberto José. Matemática Financeira – Livro ETEC-Brasil, 2010. 2ª Edição.

PENNER, R. C. (1999), Discrete Mathematics: Proof Techniques and Mathematical Structures, River Edje: World Scientific, ISBN 981-02-4088-0

PUTNOKI, José Carlos. Elementos de Geometria e Desenho Geométrico. 4a ed, São Paulo: Scipione, 1993.

REZENDE, Eliane Q. F. Geometria euclidiana e construções geométricas. Campinas: Ed. Unicamp, 2000.

VIANNA C. R. & CURY H. N. Revista História & Educação Matemática, v.1, n.1, pp. 23-37, jan. / jun. 2001. Ângulos: uma "História" escolar.

WAGNER, E. Construções Geométricas. CPM-SBM, 2000.

Referências das figuras

Figura 1.1: Reta numérica real
Fonte: http://portalgemte.com.br/files/planos_de_aula/plano_4/plano_4/p3.html

Figura 1.2: Diagrama de Venn.
Fonte http://pt.scribd.com.

Figura 1.3: Diagrama de Venn Euler – Interseção de conjuntos
Fonte: www.brasilescola.com

Figura 1.4: Quadrado e diagonal
Fonte: Elaborado pelo DI.

Figura 1.5: Triângulo retângulo
Fonte: Elaborado pelo DI.

Figura 2.1: Reta
Fonte: Elaborado pelo DI.

Figura 2.2: Semirreta
Fonte: Elaborado pelo DI

Figura 2.3: Reta
Fonte: Elaborado pelo DI.

Figura 2.4
Fonte: Elaborado pelo DI

Figura 3.1: Estrada
Fonte: www.shutterstock.com

Figura 2.2: Densidade demográfica
Fonte: www.grupoescolar.com

Figura 3.3: Preço
Fonte: http://3.bp.blogspot.com

Figura 8.1: Balança representando a ideia de equivalência entre os membros de uma equação
Fonte: http://mundoeducacao.uol.com.br

Figura 9.2: Parábola representada por um corte transversal em um cone
Fonte: http://pt.wikipedia.org

Figura 10.1: Eixos cartesianos
Fonte: http://www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/relacoes-e-funcoes/relacoes-e-funcoes.php

Figura 10.2: Eixos cartesianos e pares ordenados
Fonte: http://ensinomediopenha2010.blogspot.com/2010/08/o-surgimento-da-geometria-analitica.html

Figura 10.3: Triângulo representado por meio de um plano cartesiano
Fonte: http://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/area-um-triangulo-pela-geometria-analitica.htm

Figura 11.2.1: Gráfico de uma função polinomial do 1º grau
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 11.2.2: Gráfico de uma função polinomial do 1º grau
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 12.1: Parábola
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 12.2: Parábola
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 14.1: Gráfico
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 14.2: Representação gráfica de juros simples e compostos.
Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 14.1
Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 16.1
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 17.1: Gráfico
Fonte: http://cantinhodopinguim.blogspot.com

Figura 17. 2: Pessoas
Fonte: http://govirtualoffice.com

Figura 18.1: Moda
Fonte: Banco de imagens DI

Figura 18.1: Comparação entre média, mediana e moda
Fonte: Acervo pessoal do autor.

Tabela 19.1: Tabela
Fonte: imagem do autor.

Tabela 19.2 - Preço do artigo "Y" no atacado na cidade "X"
Fonte: Dados Fictícios (imagem do autor)

Tabela 19.3 - Número de assaltos na cidade "X" em 2006
Fonte: Dados Fictícios (imagem do autor)

Tabela 19.4 - Número de candidatos ao vestibular da Universidade "X" em 2006
Fonte: Dados Fictícios (imagem do autor)

Tabela 19.5 - Número de alunos matriculados nas escolas particulares na cidade "X"
Fonte: Dados Fictícios (imagem do autor)

Figura 20.1
Fonte: http://mybelojardim.com/importacoes-de-pescados-495-porcento-mais/

Figura 20.2: Gráfico em linha
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 20.3: Gráfico em colunas
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 20.4: Gráfico em barras
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 20.5: Gráfico em setores
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 20.6: Gráfico em setores
Fonte: Dados fictícios (imagem elaborada pelo autor)

Atividades autoinstrutivas

1. Considere as seguintes sequências de números:

I. 3, 7, 11,...

II. 2, 6, 18,...

III. 2, 5, 10, 17,...

O número que continua cada uma das sequências na ordem dada deve ser respectivamente:

a) 15, 36 e 24

b) 15, 54 e 24

c) 15, 54 e 26

d) 17, 54 e 26

e) 17, 72 e 26

2. (CFO) Se uma vela de 360 mm de altura, diminui 1,8 mm por minuto, quanto tempo levará para se consumir?

a) 20 minutos

b) 30 minutos

c) 2h 36 min

d) 3h 20 min

e) 3h 18min

3. (SESD) 30 operários deveriam fazer um serviço em 40 dias. 13 dias após o início das obras, 15 operários deixaram o serviço. Em quantos dias ficará pronto o restante da obra?

a) 52

b) 53

c) 54

d) 56

e) 58

4. (FESP) Doze operários, em 90 dias, trabalhando 8 horas por dia, fazem 36m de certo tecido. Podemos afirmar que, para fazer 12m do mesmo tecido, com o dobro da largura, 15 operários, trabalhando 6 horas por dia levarão:

a) 90 dias

b) 80 dias

c) 12 dias

d) 36 dias

e) 64 dias

5. (Colégio Naval) Vinte operários constroem um muro em 45 dias, trabalhando 6 horas por dia. Quantos operários serão necessários para construir a terça parte desse muro em 15 dias, trabalhando 8 horas por dia?

a) 10

b) 20

c) 15

d) 30

e) 6

6. (EPCAr) Um trem com a velocidade de 45km/h, percorre certa distância em três horas e meia. Nas mesmas condições e com a velocidade de 60km/h, quanto tempo gastará para percorrer a mesma distância?

a) 2h30min18s

b) 2h37min8s

c) 2h37min30s

d) 2h30min30s

e) 2h29min28s

7. (ETFPE) Se 8 homens levam 12 dias montando 16 máquinas, então, nas mesmas condições, 15 homens montam 50 máquinas em:

a) 18 dias

b) 3 dias

c) 20 dias

d) 6 dias

e) 16 dias

8. (ESA) 12 pedreiros fizeram 5 barracões em 30 dias, trabalhando 6 horas por dia. O número de horas por dia, que deverão trabalhar 18 pedreiros para fazerem 10 barracões em 20 dias é:

a) 8

b) 9

c) 10

d) 12

e) 15

9. (UFMG) Ao reformar-se o assoalho de uma sala, suas 49 tábuas corridas foram substituídas por tacos. As tábuas medem 3 m de comprimento por 15 cm de largura e os tacos 20 cm por 7,5 cm. O número de tacos necessários para essa substituição foi:

a) 1.029

b) 1.050

c) 1.470

d) 1.500

e) 1.874

10. Numa PA de razão 5, o vigésimo termo vale 8. Qual o terceiro termo?

a) - 10

b) 77

c) - 77

d) 17

e) - 26

11. As medidas dos lados de um triângulo são expressas por $x + 1$, $2x$, $x^2 - 5$ e estão em P.A. , nesta ordem. O perímetro do triângulo vale:

a) 8

b) 12

c) 15

d) 24

e) 33

12. (UFBA) Um relógio que bate de hora em hora o número de vezes correspondente a cada hora, baterá, de zero às 12 horas x vezes. Calcule o dobro da terça parte de x.

a) 10

b) 50

c) 60

d) 70

e) 80

13. (UFBA) Numa progressão aritmética, o primeiro termo é 1 e a soma do n-ésimo termo com o número de termos é 2. A razão dessa progressão é igual a:

a) - 1

b) 7

c) - 6

d) 17

e) - 26

14. A soma dos múltiplos positivos de 8 formados por 3 algarismos é igual a:

a) 64376

b) 12846

c) 21286

d) 112

e) 61376

15. **A soma do 2º com o 3º termo de uma P.G. crescente vale 16 e o produto do 1º com o 3º é 16. A alternativa que representa essa P.G. é:**

a) (4/3, 4, 12, ...)

b) (3, 6, 9, ...)

c) (1/3, 2/3, 1,...)

d) (3, 12, 48, ...)

e) (1, 3, 9, ...)

16. **Calcule a soma dos 6 primeiros termos da P.G. (7, 14, ...).**

a) 4376

b) 2846

c) 1286

d) 1112

e) 441

17. **Calcule a soma dos 10 primeiros termos da PG (1,2,4,8,...)**

a) 4306

b) 2002

c) 1286

d) 1023

e) 1441

18. **Resolva a equação: x + x/2 + x/4 + x/8 + x/16 + ... = 100**

a) 50

b) 60

c) 70

d) 80

e) 100

19. **Se a soma dos três primeiros termos de uma PG decrescente é 39 e o seu produto é 729, então sendo a, b e c os três primeiros termos, o valor de $a^2 + b^2 + c^2$ é igual a:**

a) 500

b) 602

c) 709

d) 810

e) 819

20. **A razão entre a altura de Tarcísio e a sua sombra, em determinada hora do dia, é de 3 para 2. Se a sombra mede 1,2m qual é a altura de Tarcísio?**

a) 1,70 m

b) 1,71 m

c) 1,72 m

d) 1,73 m

e) 1,80 m

21. **Sabe–se que 1 está para x assim como $1 + \frac{1}{2}$ está para $1 - \frac{1}{2}$. Nestas condições, qual o valor de x?**

a) 1/3

b) 1/7

c) 1/8

d) 1/9

e) 4/2

22. **Para fazer um refresco, misturamos suco concentrado com água na razão de 3 para 5. Nessas condições, 9 copos de suco concentrado devem ser misturados com quantos copos de água?**

a) 15

b) 17

c) 18

d) 19

e) 20

23. **A razão entre a velocidade de dois móveis, A e B, é de $\frac{3}{8}$. Calcule a velocidade do móvel A Quando a velocidade do móvel B for igual a 20m/s.**

a) 5 m/s

b) 5,5 m/s

c) 6,2 m/s

d) 7,5 m/s

e) 20 m/s

24. **Num congresso havia 50 pessoas entre homens e mulheres. Descubra quantos homens e quantas mulheres estavam presentes, sabendo que o produto das quantidades dos dois grupos é 621 e que a quantidade das mulheres é maior que a quantidade dos homens.**

a) 20 mulheres e 30 homens

b) 25 mulheres e 25 homens

c) 12 mulheres e 38 homens

d) 27 mulheres e 23 homens

e) 21 mulheres e 29 homens

25. **O valor máximo da função $f(x) = -x^2 + 240x + 2000$ é:**

a) 120

b) 170

c) 180

d) 190

e) 200

26. **A função $f(x) = x^2 - 2x + 1$ tem valor mínimo no ponto:**

a) -1

b) 1

c) - 8

d) 9

e) 2

27. **Em uma partida de futebol a trajetória da bola ao ser batida uma falta do jogo, é tal que a sua altura h em metros, varia com o tempo t em segundos, de acordo com a equação $h = -t^2 + 10t$ com $0 \leq t \leq 10$. Então a altura máxima atingida pela bola é o ponto onde a bola começa a descer são:**

a) 5 metros e 15 metros

b) 15 metros e 5 metros

c) 35 metros e 10 metros

d) 25 metros e 5 metros

e) 22 metros e 3 metros

28. **Supondo que no dia 5 de dezembro de 2011, o Serviço de Meteorologia do Estado tenha informado que a temperatura na capital atingiu o seu valor máximo às 14 horas, e que nesse dia a temperatura f(t) em graus é uma função do tempo "t" medido em horas, dada por $f(t) = -t^2 + bt - 156$, quando $8 < t < 20$. Nestas condições o valor de b é igual a:**

a) 28

b) 10

c) -80

d) 90

e) 20

29. **A temperatura, em graus centígrados, no interior de uma câmara refrigeradora, é dada por $f(t) = t^2 + 7t + A$, onde t é medido em minutos e A é constante. Se, no instante $t = 0$, a temperatura é de 10°C, o tempo gasto para que a temperatura seja mínima, em minutos, é:**

a) 3,5 minutos

b) 10 minutos

c) 8 minutos

d) 9 minutos

e) 2 minutos

30. **Uma imobiliária aluga 180 apartamentos do tipo econômico por R$ 300,00 mensais. Estima-se que, para cada R$ 10,00 de aumento no aluguel, 5 apartamentos ficarão vazios. Que aluguel deverá ser cobrado para se obter prejuízo mínimo.**

a) 550,00

b) 600,00

c) 800,00

d) 900,00

e) 2000,00

31. **Para uma determinada viagem, foi fretado um avião com 200 lugares. Cada pessoa deve pagar R$ 300,00 mais uma taxa de R$ 6,00 por cada lugar que ficar vago. Qual é a receita arrecadada se compareceram 150 pessoas para a viagem?**

a) 90.000,00

b) 100.000,00

c) 834.000,00

d) 923.000,00

e) 200.000,00

32. **Em uma fábrica, o custo de produção de x produtos é dado por $C(x) = x^2 + 22x + 1$. Sabendo-se que cada produto é vendido por R$ 10,00, determine o número de produtos que devem ser vendidos para se ter um lucro de R$ 44,00.**

a) 15 produtos

b) 10 produtos

c) 8 produtos

d) 9 produtos

e) 2 produtos

33. **Uma microempresa, no seu segundo ano de funcionamento, registrou um lucro de R$ 28 mil, o que representou um acréscimo de 40% sobre o lucro obtido no seu primeiro ano de existência. No quarto ano, o lucro registrado foi 20% inferior ao do segundo ano. Considerando apenas esses três registros e representando por x o tempo de existência da empresa, em anos, pode-se modelar o lucro L(x) - em múltiplos de R$ 1.000,00 - obtido nos 12 meses anteriores à data x, por meio de uma função polinomial do segundo grau da forma $L(x) = ax^2 + bx + c$. Os coeficientes a, b e c desse polinômio são unicamente determinados a partir das informações acima, em que L(1), L(2) = 28 e L(4) representam os lucros da empresa no primeiro, no segundo e no quarto anos, respectivamente. Uma vez encontrado esse polinômio, o modelo permite inferir se houve lucro (ou prejuízo) em datas diferentes daquelas registradas, desde que se considere $x \geq 1$. Com base nas informações e no modelo polinomial acima, julgue os itens seguintes como verdadeiro ou falso:**

- O lucro da empresa no quarto ano foi de R$ 24 mil;
- No plano de coordenadas xOy, o gráfico da função L é parte de uma parábola de concavidade voltada para baixo;
- O lucro obtido pela empresa no terceiro ano foi maior que o registrado no segundo ano;
- O lucro máximo (anual) alcançado pela empresa foi registrado durante o primeiro trimestre do terceiro ano;
- A empresa não apresentou prejuízo durante os 5 primeiros anos.

A alternativa que representa a ordem correta entre afirmações verdadeiras e falsas é a:

a) V, V, V, F, V

b) F, V, F, F, V

c) F, V, V, F, F

d) F, V, V, F, V

e) V, V, V, F, V

34. Uma companhia comprou uma máquina no valor de R$ 15000. Sabe-se que o valor residual após 10 anos será de R$ 2000. Usando o gráfico de uma função y = ax+b (linha reta) para depreciar a máquina de R$ 15000 para R$ 2000 em 10 anos, qual o valor da maquinaria depois de 6 anos?

a) R$ 1.200,00

b) R$ 2.200,00

c) R$ 3.200,00

d) R$ 7.200,00

e) R$ 8.200,00

35. O custo mensal de uma fábrica que produz varas de pescar é de R$ 4.200,00 e o custo variável de R$ 55,00 por vara de pescar. O preço de venda é de R$ 105,00. Quantas unidades precisam ser vendidas para não haver prejuízo durante um mês?

a) 84

b) 100

c) 120

d) 184

e) 200

36. Uma equação do 2º grau possui sempre duas soluções. A equação $x^2 - 16 = 0$ têm como soluções:

a) – 1 e 1

b) 2 e 3

c) – 4 e 4

d) 2 e 4

e) –1 e 0

37. **Na loja de Sarita o plano de venda de eletrodomésticos é dado pela função: f(x) = 100 + 5p, em que p representa o valor da prestação. Sendo assim, o valor de cada prestação na venda de um televisor cujo preço é de R$ 2.455,75 é de:**

a) R$ 471,15

b) R$ 475,20

c) R$ 485,15

d) R$ 480,00

e) R$ 470,75

38. **Um agricultor necessita cercar uma área retangular de 60 m2 para plantio. Para obter o menor custo de arame, assinale a alternativa que representa a opção ideal para as medidas:**

a) 3 m x 20 m;

b) 4 m x 15 m;

c) 5 m x 12 m;

d) 6 m x 10 m;

e) 8 m x 14 m.

39. **(OBMEP – 2011) Alberto, Bernardo e Carlos disputaram uma corrida, na qual cada um deles correu com velocidade constante durante todo o percurso. Quando Alberto cruzou a linha de chegada, Bernardo e Carlos estavam 36 e 46 metros atrás dele, respectivamente. Quando Bernardo cruzou a linha de chegada, Carlos estava 16 metros atrás dele. Qual é o comprimento da pista?**

a) 96 m

b) 100 m

c) 120 m

d) 136 m

e) 144

40. **A figura mostra dois homens erguendo um piano com uma corda. Se um dos homens puxar 15m de corda e o outro puxar 25m, quantos metros o piano vai subir?**

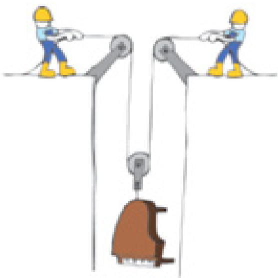
a) 15

b) 20

c) 25

d) 30

e) -10



41. **Determinar o montante a juros simples correspondente a uma aplicação de R$ 450.000,00 por 225 dias, à taxa de 5,6% ao mês.**

a) M = R$ 139.000.000

b) M = R$ 239.000.000

c) M = R$ 339.000.000

d) M = R$ 539.000.000

e) M = R$ 639.000.000

42. **Colocada em um banco, uma quantia rendeu R$ 40.000,00 a juros compostos de 2% a.m., durante 5 meses. Calcular essa quantia.**

a) P = R$ 13.000,33

b) P = R$ 39.000,00

c) P = R$ 36.229,25

d) P = R$ 53.209,23

e) P = R$ 63.234,12

43. **Calcular o montante de um capital inicial de R$ 8.000,00, a juros compostos de 3% a.m. aplicado do dia 4 de março a 3 de julho.**

a) M = R$ 1.001,33

b) M = R$ 3.123,00

c) M = R$ 8.487,20

d) M = R$ 5.209,25

e) M = R$ 6.234,12

44. Calcule o montante de um capital de R$ 24.000,00, aplicado a juros compostos, durante um ano, à taxa de 5% ao mês.

a) M = R$ 41.001,33

b) M = R$ 43.100,40

c) M = R$ 48.487,20

d) P = R$ 51.209,25

e) P = R$ 62.234,12

45. Determine em que prazo um empréstimo de R$ 33.000,00 pode ser quitado em um único pagamento de R$ 66.375,00, sabendo que a taxa contratada é de 15% ao semestre em regime de capitalização composta.

a) 5

b) 10

c) 12

d) 13

e) 14

46. Calcule o capital necessário para produzir um montante de R$ 10.980,00 no final de um ano e meio, aplicado a uma taxa de juros compostos de 18% ao trimestre.

a) P = R$ 130,33

b) P = R$ 392,00

c) P = R$ 406,37

d) P = R$ 539,23

e) P = R$ 634,12

47. Um capital de R$ 2.850,00 foi aplicado a juros compostos à taxa de 2,25% a.a. Calcule o prazo necessário para que esse capital produza um montante de R$ 4.068,72.

a) 6

b) 5

c) 4

d) 3

e) 2

48. **Calcule o juros do principal que no prazo de 5 meses a 3% a.m. produziu o montante de R$ 4.058,00**

a) J = R$ 430,33

b) J = R$ 492,00

c) J = R$ 416,37

d) J = R$ 557,53

e) J = R$ 534,12

49. **Mário tomou emprestado R$ 240 000,00 durante 3 meses, à taxa de 60% ao ano. Que quantia devolveu após os 3 meses, no regime simples de formação?**

a) R$ 115 000,00

b) R$ 111 000,00

c) R$ 155 000,00

d) R$ 196 000,00

e) R$ 276 000,00

50. **(FGV-SP) Pedro aplicou R$ 20 000,00 por um ano em dois fundos A e B. O fundo A rendeu 10% e B rendeu 25%. Sabendo que o ganho proporcionado pelo fundo B foi superior ao de A em R$100,00, podemos afirmar que a diferença (em valor absoluto) dos valores aplicados em cada fundo foi de:**

a) R$ 8 000,00

b) R$ 7 000,00

c) R$ 5 000,00

d) R$ 6 000,00

e) R$ 9 000,00

Currículo do professor-autor

Roberto José Medeiros Junior

É Licenciado e Bacharel em Matemática pela Universidade Tuiuti do Paraná (1999), Especialista em Educação Matemática com ênfase em Tecnologias pela Universidade Tuiuti do Paraná (2001), Especialista em Educação à Distância (Tutoria a Distância) – EaD/FACINTER (2007) tem Mestrado em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (2007). Tecnólogo em Gestão pública pelo Instituto Federal do Paraná – IFPR (2010). Entre os anos de 1996 e 2008, atuou como professor de Matemática do Ensino Fundamental ao Médio da rede pública e privada e, desde 2003 vem atuando como professor no Ensino Superior, nos cursos de Licenciatura em Matemática, na modalidade presencial e à distância em instituições públicas e privadas. Entre os anos de 2003 e 2005 atuou como professor de Metodologia, Prática de Ensino e Estágio Supervisionado em Matemática na Universidade Federal do Paraná, nos cursos de Licenciatura em Matemática, Física e Pedagogia. Atualmente é professor de Matemática em regime de Dedicação Exclusiva do Instituto Federal do Paraná na modalidade presencial e a distância. É um dos autores do Livro Didático Público de Matemática para o Ensino Médio do Estado do Paraná e, é também, autor de livros para a formação continuada do Centro Interdisciplinar de Formação Continuada de Professores (CINFOP), da Universidade Federal do Paraná e autor de livros de Matemática Financeira e Estatística para os cursos técnicos do Instituto Federal do Paraná - IFPR.