Matemática Financeira

Vilmar dos Santos Alves

Técnico em Finanças

Cuiabá-MT
2014

Presidência da República Federativa do Brasil
Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Diretoria de Integração das Redes de Educação Profissional e Tecnológica

Equipe de Revisão

Universidade Federal de Mato Grosso – UFMT
Coordenação Institucional
Carlos Rinaldi

Coordenação de Produção de Material Didático Impresso
Pedro Roberto Piloni

Designer Educacional
Daniela Mendes

Ilustração
Tatiane Hirata

Diagramação
Tatiane Hirata

Revisão de Língua Portuguesa
Lívia de Souza Lima Pulcherio Monteiro

Revisão Final
Marta Magnusson Solyszko

Instituição Autora
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia - IFRO

Campus Porto Velho Zona Norte

Direção-Geral
Miguel Fabrício Zamberlan

Direção de Administração e Planejamento
Gilberto Laske

Departamento de Produção de EaD
Ariádne Joseane Felix Quintela

Coordenação de Design Visual e Ambientes de Aprendizagem
Rafael Nink de Carvalho

Coordenação da Rede e-Tec
Ruth Aparecida Viana da Silva

Projeto Gráfico
Rede e-Tec Brasil / UFMT

Apresentação Rede e-Tec Brasil

Prezado(a) estudante,

Bem-vindo(a) à Rede e-Tec Brasil!

Você faz parte de uma rede nacional de ensino, que por sua vez constitui uma das ações do Pronatec - Programa Nacional de Acesso ao Ensino Técnico e Emprego. O Pronatec, instituído pela Lei nº 12.513/2011, tem como objetivo principal expandir, interiorizar e democratizar a oferta de cursos de Educação Profissional e Tecnológica (EPT) para a população brasileira propiciando caminho de acesso mais rápido ao emprego.

É neste âmbito que as ações da Rede e-Tec Brasil promovem a parceria entre a Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica (Setec) e as instâncias promotoras de ensino técnico como os institutos federais, as secretarias de educação dos estados, as universidades, as escolas e colégios tecnológicos e o Sistema S.

A educação a distância no nosso país, de dimensões continentais e grande diversidade regional e cultural, longe de distanciar, aproxima as pessoas ao garantir acesso à educação de qualidade e ao promover o fortalecimento da formação de jovens moradores de regiões distantes, geográfica ou economicamente, dos grandes centros.

A Rede e-Tec Brasil leva diversos cursos técnicos a todas as regiões do país, incentivando os estudantes a concluir o ensino médio e a realizar uma formação e atualização contínuas. Os cursos são ofertados pelas instituições de educação profissional e o atendimento ao estudante é realizado tanto nas sedes das instituições quanto em suas unidades remotas, os polos.

Os parceiros da Rede e-Tec Brasil acreditam em uma educação profissional qualificada – integradora do ensino médio e da educação técnica - capaz de promover o cidadão com capacidades para produzir, mas também com autonomia diante das diferentes dimensões da realidade: cultural, social, familiar, esportiva, política e ética.

Nós acreditamos em você!
Desejamos sucesso na sua formação profissional!

Ministério da Educação
Fevereiro de 2014

Nosso contato
etecbrasil@mec.gov.br

Indicação de ícones

Os ícones são elementos gráficos utilizados para ampliar as formas de linguagem e facilitar a organização e a leitura hipertextual.

Atenção: indica pontos de maior relevância no texto.

Saiba mais: oferece novas informações que enriquecem o assunto ou "curiosidades" e notícias recentes relacionadas ao tema estudado.

A-Z

Glossário: indica a definição de um termo, palavra ou expressão utilizada no texto.

Mídias integradas: remete o tema para outras fontes: livros, filmes, músicas, *sites*, programas de TV.

Atividades de aprendizagem: apresenta atividades em diferentes níveis de aprendizagem para que o estudante possa realizá-las e conferir o seu domínio do tema estudado.

Reflita: momento de uma pausa na leitura para refletir/escrever sobre pontos importantes e/ou questionamentos.

Palavra do Professor-autor

Caro (a) estudante,
Seja bem vindo(a) ao componente curricular: Matemática Financeira!
É com imenso prazer que lhe apresento o conteúdo desta disciplina, com carga horária de 80 horas.
Esperamos que este estudo venha contribuir significativamente para o seu processo de aprendizagem e que possa trazer as informações necessárias para um bom desempenho profissional.
No decorrer das aulas, você terá a oportunidade de interagir através da plataforma Moodle e participar de *chat*, fóruns, realizar atividades individuais e em grupo, o que lhe proporcionará o crescimento e o aperfeiçoamento do aprendizado.
Vamos aprender mais? Somos parceiros nesta etapa da sua formação, conte comigo.

Contamos com sua participação!
Dedique-se aos estudos e faça a diferença!

Apresentação da disciplina

Olá! Seja bem-vindo (a) ao Curso de Habilitação Profissional Técnico de Nível Médio em Finanças!

A disciplina Matemática Financeira, que você está iniciando faz parte desse curso. No decorrer de nossas aulas, mostraremos a você que a Matemática Financeira é um instrumento que fornece informações úteis para a tomada de decisões dentro e fora da empresa.

A Matemática Financeira aborda conceitos matemáticos aplicados à área financeira. Por meio da utilização da matemática financeira, é possível realizar operações envolvendo conceitos de capitalização simples, composta, descontos, anuidades e amortizações, além de cálculos de depreciação e de análises financeiras em ambientes inflacionários, aplicados a situações concretas de seu dia a dia que envolvam operações de recursos financeiros.

Desta forma, conhecer bem essas teorias, técnicas e aplicações da Matemática Financeira constituem um aspecto muito importante para a sua formação e atuação no mercado de trabalho como técnico em finanças, bem como para aplicação em outras atividades de sua vida profissional.

Neste material temos informações preciosas que podem colaborar com seu processo de construção do conhecimento. Bons estudos!

Sumário

Aula 1. Conceitos básicos da matemática aplicados a finanças **13**

1.1 Conceitos básicos 14

1.2 Terminologias 15

1.3 O valor do dinheiro no tempo e a matemática financeira 17

1.4 Fluxo de caixa 24

1.5 Razão e regra de três simples 25

1.6 Porcentagem 28

Aula 2. Juros simples **37**

2.1 Juros 37

2.2 Montante 41

2.3 Juros simples em períodos não inteiros 46

Aula 3. Juros compostos **53**

3.1. Diferença entre juros simples e compostos 53

3.2 Cálculo do valor futuro em juros compostos 56

3.3 Cálculo do capital – fator de capitalização 58

3.4 Cálculo da taxa de juros compostos 61

3.5 Cálculo do tempo – número de períodos 63

Aula 4. Taxas **69**

4.1 Taxas de juros proporcionais e equivalentes 69

4.2 Taxa de juros nominais 73

4.3 Taxa de juros proporcional e taxa efetiva 75

Aula 5. Descontos **81**

5.1. Aplicações de descontos 82

5.2 Desconto simples racional 84

5.3 Desconto simples comercial 89

5.4 Taxa implícita de juros no desconto simples comercial 93

5.5 Desconto composto 95

Aula 6. Séries de pagamentos 101

6.1.Classificação das anuidades 101

6.2 Cálculo do valor presente (P) de uma série a partir do valor da prestação (R)103

6.3 Cálculo das prestações periódicas (R) a partir do valor presente (P) 107

6.4 Cálculo do valor futuro (S) a partir do valor das prestações (T) 109

6.4 Cálculo do valor das prestações (T), a partir do valor futuro 111

Aula 7. Amortização 117

7.1 Amortização 117

7.2 Sistema de amortização constante (SAC) 122

7.3 Sistema de amortização Price 128

Aula 8. Análise de investimentos 133

8.1 Análise de dados 133

8.2 Valor presente líquido (VPL) 134

8.3 Taxa interna de retorno (TIR) 139

Aula 9. Índices inflacionários 145

9.1. Conceitos e índices 145

9.2 Cálculo de inflação média e acumulada 148

9.3 Taxa de desvalorização da moeda 150

Aula 10. Depreciação 155

10.1 Depreciação 155

10.2 Depreciação pelo método linear 157

10.3 Depreciação pelo método da taxa constante 158

10.4 Depreciação pelo método de capitalização 162

Palavras finais 167

Guia de Soluções 168

Referências 179

Obras Consultadas 181

Bibliografia básica 181

Currículo do Professor-autor 182

Aula 1. Conceitos básicos da matemática aplicados a finanças

Objetivos:

- assinalar os conceitos básicos da matemática financeira;
- correlacionar o conceito de dinheiro e tempo;
- ilustrar com clareza a regra de três simples e porcentagem;
- analisar técnicas para avaliar a equivalência de capitais a juros simples; e
- reconhecer as terminologias básicas utilizadas na matemática financeira.

Prezado(a) estudante,

Esta é a primeira aula de nossa disciplina. Nesta aula, veremos alguns conceitos básicos da matemática que são muito úteis nas aplicações da matemática financeira.

Esperamos que você compreenda bem estes conceitos e que os mesmos sirvam como base para o desenvolvimento de nossas próximas aulas desta disciplina.

Para começo de conversa, é relevante observar que a matemática financeira possui conceitos muito importantes para o(a) Técnico(a) em Finanças pois tratará da relação dinheiro, tempo e taxas. Por meio da relação entre estas três variáveis, temos diversas formulações, tais como juros simples, juros compostos, descontos, amortizações, entre outras, que serão de grande aplicação em sua profissão.

Ao final desta disciplina, você será capaz de compreender, identificar e utilizar os conceitos básicos da matemática financeira e, dentre estes, o conceito de capitalização simples, composta e anuidades, amortização, análises financeiras e depreciações, aplicando-as a situações concretas de seu cotidiando.

Nesta aula, especificamente, você aprenderá os conceitos e principais termos aplicados a esta disciplina, regra de três simples e porcentagem.

1.1 Conceitos básicos

A matemática e a economia são duas matérias que assustam muitas pessoas. Os números e a terminologia utilizados nos noticiários econômicos, tais como juros, inflação, **taxa Selic** e outros fazem com que essas duas áreas sejam de difícil compreensão para a maioria das pessoas. Mas, o que poderíamos falar, então, da somatória destas matérias? É a matemática financeira, tema desta disciplina.

A **taxa Selic** é a taxa apurada no órgão que leva o mesmo nome, Sistema Especial de Liquidação e de Custódia (Selic), obtida mediante o cálculo da taxa média ponderada e ajustada das operações de financiamento por um dia, **lastreadas** em títulos públicos federais. Em outras palavras, podemos concluir que a taxa Selic se origina de taxas de juros efetivamente observadas no mercado. Disponível em: < http://www.bcb.gov.br/htms/selic/selicdescricao.asp> Acesso em: 23 jan. 2014.

A-Z

Lastreada vem de lastro que é resultante do ouro que em um país garante a circulação fiduciária do papel-moeda. As **taxas lastreadas** são formadas pelos empréstimos entre bancos e refletem as expectativas das instituições financeiras em relação ao custo do dinheiro (Cafeo, 2011).

Conheça mais sobre taxas lastreadas em: http://www.pg.fca.unesp.br/teses/pdfs/arq0645.pdf

Aqui, vamos conhecer a aplicação dos conceitos da matemática para o universo das finanças, algo que faz parte da vida de todos nós.

Antes de mais nada, para que você se sinta encorajado(a) a se dedicar aos estudos, saiba que, na maior parte de nossa disciplina, vamos trabalhar com conceitos que não lhe são totalmente desconhecidos, uma vez que a matemática financeira tem como base um conteúdo que faz parte da matemática que estudamos no ensino fundamental e médio. Esta disciplina analisa todas as situações relativas ao dinheiro por meio da utilização de operações que já são conhecidas. No estudo, você verá que o principal desafio está em montar o cálculo, pois é só definir todos os termos envolvidos, identificar com precisão os fatores essenciais para a operação matemática e, depois disso, executar os cálculos propriamente ditos. É possível escolher entre fazer essas operações ou com a ajuda da tecnologia, usando calculadoras financeiras ou softwares como o Excel.

De acordo com Wakamatsu (2012, p. 2), estudar matemática financeira "pode lhe trazer benefícios profissionais – afinal, acumular conhecimento sempre é algo bem visto no mercado de trabalho." Mas tenha certeza de que você também vai tirar vantagens pessoais do estudo, aprendendo como funciona a relação entre matemática e dinheiro e entendendo como trabalham os mecanismos de cobrança presentes no dia a dia – cheque especial, juros de cartão de crédito, entre outros.

1.2 Terminologias

Toda operação financeira – como a concessão de empréstimos, os financiamentos bancários e as dívidas em cartão de crédito – tem quatro componentes essenciais (CASTANHEIRA, 2010).

1.2.1 Valor presente

O primeiro é o **valor presente**, que, como o nome já diz, representa a data atual de uma operação financeira, que funciona como ponto de partida da operação; por exemplo, o montante que você pega emprestado de um banco ao fazer o financiamento de sua casa ou carro. A notação para o valor presente é a letra P.

Na matemática financeira, valor presente também é chamado de origem (O), principal (P) ou capital (C). Neste caderno, vamos utilizar apenas a expressão valor presente.

1.2.2 Tempo

O segundo componente é o **tempo**. Afinal, toda operação se passa dentro de uma quantidade especifica de tempo. Pense, por exemplo, nos financiamentos de imóveis que costumam se estender por até vinte anos, de acordo com o plano. Usamos n para nos referirmos à quantidade de tempo. Entretanto, é importante observar que não há uma regra dizendo se devemos utilizar dia, mês ou ano como unidade de medida. T**udo depende do cálculo que desenvolvemos.**

Isso tem relação direta com o próximo componente: a **taxa de juros**.

1.2.3 Taxa de juros

A taxa de juros mantém relação direta com a unidade de tempo, uma vez que esta pode ser aplicada por mês, dia, ano ou qualquer outro prazo estabelecido. O essencial é que faça referência ao tempo (n), ou seja, se falamos de juros ao mês, todos nossos cálculos terão o mês como unidade de tempo e assim sucessivamente. A taxa de juros é representada por i, podendo ser expressa em porcentagem com 5% ou em números decimais, conforme podemos demonstrar:

$$5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

1.2.4 Valor futuro

Por fim, chamamos de valor futuro o resultado da ação dos juros sobre o valor presente. Sua notação é Fn – esse n é o mesmo n da quantidade de tempo. Por exemplo, passados cinco meses do empréstimo, teremos um F específico desse período.

Os termos montante (M) e saída (S) também são usados para designar o valor futuro. Na calculadora financeira HP-12C, o valor presente e o valor futuro são designados, respectivamente, por PV e FV.

De acordo com definição extraída do site Só Matemática:

> Matemática Financeira é uma ferramenta útil na análise de algumas alternativas de investimentos ou financiamentos de bens de consumo. Consiste em empregar procedimentos matemáticos para simplificar a operação financeira a um Fluxo de Caixa.Disponível em: < http://www.somatematica.com.br/emedio/finan.php> Acesso em: 10 nov. 2013.

É bem provável que você esteja um pouco confuso com todos estes conceitos, não é verdade?

Então, vamos visualizá-los em uma situação real?

Vamos imaginar que você tenha visto um lindo sapato em uma loja de sua cidade. Além de lindo, confortável e fabricado em couro legítimo, por estar na promoção, o seu preço é de R$ 200,00, se o pagamento for a vista. Você está certo de que de irá comprá-lo, entretanto, você não tem o dinheiro disponível, mas sabe que terá dinheiro daqui a três meses. Ao comentar com seu amigo Miguel, ele se prontificou a lhe emprestar o valor da compra pelo prazo de três meses, porém com a condição de que lhe sejam pagos os juros do período a uma taxa de 1% ao mês. Mas, que valor você irá devolver para o seu amigo Miguel daqui a três meses?

Você observou que, na situação acima, aparecem vários números e quantidades? Com certeza sim. Mas, como utilizá-las? Que resposta devo buscar com o cálculo?

São muitas as perguntas, não é verdade? Mas não se preocupe, você verá que é bem fácil compreender!

Definição do padrão de resposta:

Pois bem, a primeira coisa que deve descobrir é o que verdadeiramente deve ser respondido ou que resposta eu busco encontrar.

O que buscamos é a resposta à pergunta "que valor você irá devolver para o seu amigo Miguel daqui a três meses?". Se o valor que você busca está no futuro então é o montante ou o valor futuro que representaremos por F_n.

1.2.5 Definição das variáveis do problema

Além do valor futuro que é o valor a ser devolvido daqui a três meses, temos ainda outras variáveis e então, vamos descobri-las.

Na situação acima, você precisa de R$ 200,00 para a compra do sapato. Este valor por ser necessário na data presente, o chamamos de capital ou valor presente e o representamos com a letra P .

Mas, não acabaram as variáveis. Ainda há outras duas variáveis, a taxa de juros que é de 1% ao mês e, na matemática financeira, podemos representá-la pela letra i , e o tempo da operação financeira (empréstimo), que podemos chamar de número de períodos e representar com a letra n.

1.2.6 Representação matemática das variáveis do problema

Valor presente: $P = 200$

Taxa de juros: $i = 1\%$ ao mês

Números de períodos: $n = 3$

Valor futuro: $F_3 = ?$

Você deve estar curioso para saber a resposta, não é verdade! Mas, por enquanto, o nosso objetivo é de ajudá-lo a compreender o que se pede em uma situação real que envolva dinheiro, tempo e taxa de juros. Por isso, é importante que você releia o caso dado acima e procure compreender bem como identificamos cada uma das variáveis.

Quanto ao cálculo do valor futuro, não se preocupe por agora, pois o mostraremos mais à frente.

1.3 O valor do dinheiro no tempo e a matemática financeira

Na seção anterior, falamos sobre a compra de um sapato por R$ 200 e sobre a necessidade de encontrar o valor futuro. Mas, por que existe valor presente e valor futuro? Estes valores são iguais ou diferentes?

Ao ler isto, você deve ter pensado: "é óbvio que é diferente, pois, no valor futuro, além de ter o valor emprestado que deve ser devolvido, há ainda os juros a serem pagos", não é verdade?

Mas, já que estamos fazendo tantas perguntas, que tal mais uma perguntinha? Mas por que os juros existem? Pois bem, esta pergunta pode-nos levar a uma série de diferentes respostas, não é mesmo?

Poderíamos, por exemplo, dizer que os juros correspondem:

- Ao prêmio pelo risco de o dono não ter o dinheiro de volta, caso a dívida não seja paga.

- Ao prêmio pelo tempo em que o dono do dinheiro (credor) não pode usá-lo, uma vez que este está emprestado.

- Ou até mesmo para a recomposição do valor da inflação, que é conteúdo de aulas posteriores.

Muito bem, se você pensou em qualquer uma das alternativas acima, você está certo em seu raciocínio. Porém, em termos matemáticos, por que os juros existem mesmo?

Neste sentido, é imprescindível afirmar que, do ponto de vista da Matemática Financeira, um valor monetário na data de hoje não é igual ao mesmo valor monetário em outra data.

Para ficar mais fácil compreender, vamos imaginar que tenhamos R$ 200,00 hoje. Do ponto de vista da Matemática Financeira, estes R$ 200,00 não são iguais a R$ 200,00 em qualquer outra data.

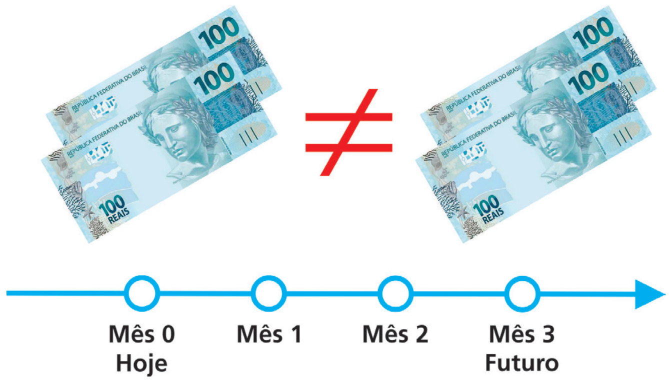


Figura 1 – Ilustração da diferença do dinheiro no tempo
Fonte: autor adaptado de http://agenciabrasil.ebc.com.br/sites/_agenciabrasil/files/gallery_assist/29/gallery_assist665111/prev/10122010-CemReais.jpg

Mas, por quê, se os R$ 200,00 ainda podem ser pagos com as mesmas notas de reais?

Apesar de parecer controverso, está correto, pois o dinheiro cresce no tempo ao longo dos períodos, devido à taxa de juros aplicada no dinheiro em relação ao tempo.

Assim, um capital de $ 200,00 emprestado hoje, com uma taxa de juros de 3% ao mês, implicará no pagamento de R$ 6,00 de juros por mês ou, se tomarmos o caso anterior, seriam R$ 18,00 de juros em três meses, o que o obrigaria a devolver ao seu amigo Miguel a importância de R$ 200,00 do valor emprestado, somado a R$ 18,00 de juros, ou seja o total de R$ 218,00 ao final de três meses.

Apesar do cálculo de juros e do valor futuro ser um conteúdo a ser explorado nas próximas aulas, vamos aproveitar para entender como foi que chegamos ao valor dos juros a serem pagos ao seu amigo Miguel.

Cálculo de juros por um mês:

Você se lembra das variáveis: valor presente (P), taxa (i) e número de períodos (n)? Agora vamos introduzir mais uma variável. É isso mesmo, a variável juros simples que é representada pela letra J.

Agora que conhecemos a variável "juros simples", podemos então calcular o valor dos juros a serem pagos ao Miguel a cada mês. Para isso, basta multiplicarmos o valor presente pelos valores da taxa de juros unitária e do número de períodos, sendo que o número de período será igual a um quando os juros procurado forem de um só mês.

Vejamos:

J= P x i x n

J= 200 x 0,03 x 1

J= 6 x 1

J= 6

O que é taxa unitária?
A taxa unitária é uma espécie de simplificação da taxa percentual, ou seja, de uma porcentagem. De uma forma mais simples, podemos dizer que é a porcentagem dividida por 100. No exemplo da compra do sapato, nós temos a taxa de 3% (o símbolo % significa por cento). Para saber a taxa unitária, basta pegarmos o número 3 e dividirmos por 100. Vejamos:

$$3\% = \frac{3}{100} = 0,03$$

É bastante simples. Mas, detalharemos melhor este assunto na aula 2.

Logo, se pode afirmar que os juros produzidos por um mês sobre o valor presente de R$ 200,00 a uma taxa de 3% ao mês será de R$ 6,00.

Cálculo de juros por três meses:

Mas, como calcularemos os juros para o período de três meses? É bem simples, pois será de forma semelhante ao cálculo anterior e a diferença é que n agora será igual a 3. Vamos, então, calcular?

J= P x i x n

J= 200 x 0,03 x 3

J= 6 x 3

J= 18

Fonte: ilustradora

Muito bem! Os juros produzidos durante os três meses é de 18 reais. Agora que você já sabe os juros que deve pagar, basta somar ao valor que você tomou emprestado, ou seja, R$ 200,00 e terá como resultado 218,00.

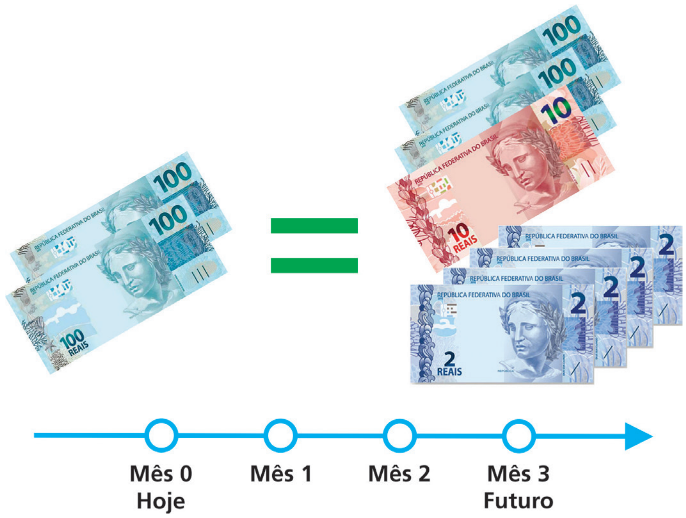


Figura 2 – Ilustração da equivalência do dinheiro no tempo
Fonte: autor adaptado de http://agenciabrasil.ebc.com.br/galeria/2010-12-10/banco-central-bc-lanca-na-proxima-segunda-feira-13-segunda-familia-de-cedulas-do-real

A Matemática Financeira está diretamente ligada ao valor do dinheiro no tempo que, por sua vez, está interligado à existência da taxa de juros.

De acordo com Puccini (2003, p. 3), são mandamentos fundamentais da Matemática Financeira que nunca podem deixar de ser observados:

a) os valores de uma mesma data são grandezas que podem ser comparadas e somadas algebricamente; e

b) os valores de datas diferentes são grandezas que só podem ser comparadas e somadas algebricamente após serem movimentadas para uma mesma data, com a correta aplicação de uma taxa de juros.

Mas, é importante analisar que os conceitos vistos acima sobre "aplicações" são complementados com os mandamentos expostos por Puccini.

Pois bem, além do caso demonstrado na figura 1, em que você percebeu que 200 reais hoje não são iguais a 200 reais daqui a três meses, o que significa dizer que o valor do dinheiro muda no tempo, há ainda outras situações que melhor ilustram os conceitos mencionados. Por exemplo, se você tivesse 200 reais hoje e fosse receber mais 200 daqui a três meses, tais valores **não poderiam** ser somados como 200 + 200 = 400?

Mas, por que não posso somar?

Porque os valores estão em datas diferentes e isso pressupõe que deverá haver juros na correção de tais valores.

Agora, imagine que o valor que você tem hoje seja aplicado a uma taxa de 3% ao mês. Ao final de três meses, terá 218 reais, como vimos na figura 2 e, se receber mais 200 reais no final deste período, então poderá somar 200 + 218 = 418 reais.

Em síntese, é isso que o autor Puccini (2013) afirma com os mandamentos fundamentais da Matemática Financeira.

1.3.1 O que são juros

O que são juros? Por que eles existem? De acordo com Passanezi (2008, p. 179), "na verdade, a valoração do amanhã tem um preço que decorre, sobretudo, das escolhas que fazemos, uma vez que o presente foge, o passado é irrecobrável e o futuro incerto". Ainda, para este teórico, esta valoração do amanhã nos "leva à adoção inevitável de escolhas, em um espaço de tempo, em troca do usufruto de alguns benefícios no presente". Assim, nasce o conceito de juros. Em síntese, é a remuneração recebida pela abdicação momentânea de usufruir do capital adquirido, ou ainda é o ônus pago pelo gozo antecipado de um capital a ser adquirido no futuro.

Reafirmando conceitos aqui vistos, Puccini (2003, p. 2), define os juros:

> como sendo a remuneração do capital, a qualquer título. São válidas as seguintes expressões como conceito de juros:
> a) remuneração do capital empregado em atividades produtivas;
> b) custo do capital de terceiros;
> c) remuneração paga pelas instituições financeiras sobre o capital nelas aplicados.

Outro aspecto observado pelo mesmo autor é quanto à unidade de medida utilizada para o cálculo dos juros, os quais "são fixados por meio de uma taxa percentual que sempre se refere a uma unidade de tempo (ano, semestre, trimestre, mês, dia)".

Exemplos:

6% ao ano = 6% a.a.

5% ao semestre = 5% a.s.

1% ao mês = 1% a.m.

Em outras palavras, taxa de juros é a razão entre os juros recebidos (ou pagos) no fim de um período de tempo e o capital inicialmente empregado. A taxa está sempre relacionada com uma unidade de tempo (dia, mês, trimestre, semestre, ano etc.)

Exemplo:

Qual a taxa de juros cobrada num empréstimo de R$ 100,00, a ser resgatado por R$ 140,00 no final de um ano?

Valor Futuro	F_n=140
Valor Presente	- P= 100
Juros	J=40

Mas, se os juros gerados sobre 100 reais foram de 40 reais, em termos percentuais como posso representá-la?

Neste caso, como estamos falando de um único período (um ano), basta que dividamos os juros gerados pelo valor inicial aplicado (valor presente), conforme abaixo demonstrado.

Cálculo da taxa de juros unitária	$i = \frac{Juros}{Valor\ Presente}$
	$i = \frac{40}{100}$
Taxa de juros unitária	i=0,4

Agora que você tem a taxa de juros unitária, é necessário multiplicá-la por 100 para encontrar a taxa na representação percentual.

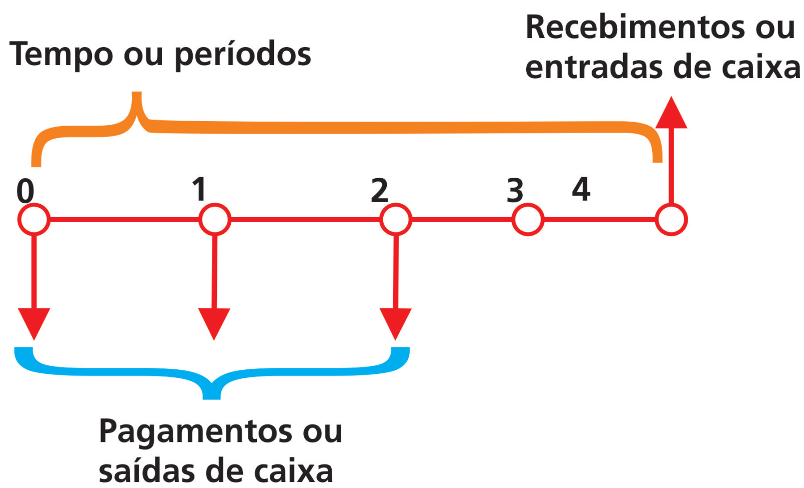
Cálculo da taxa de juros percentual	i=0,4 x 100
Taxa de juros percentual	i= 40% ao ano

1.4 Fluxo de caixa

Outro conceito importante e muito útil para compreender o comportamento da matemática financeira é o fluxo de caixa. Denomina-se fluxo de caixa o conjunto de entradas e saídas de dinheiro (caixa) ao longo do tempo. Podemos ter fluxos de caixa de empresas, de investimentos, de projetos, de operações financeiras etc.

A elaboração do fluxo de caixa é indispensável na análise de rentabilidade e custos de operações financeiras e no estudo de viabilidade econômica de projetos e investimentos.

A representação do fluxo de caixa é feita por meio de tabelas e quadros ou esquematicamente, conforme mostrado na figura a seguir:



Fonte: autor

Em um fluxo de caixa, são respeitadas as seguintes convenções:

a) A escala horizontal representa o tempo, dividido em períodos descontínuos, expresso em dias, semanas, meses, trimestres, semestres ou anos. Os pontos 1, 2, 3 … substituem as datas de calendário e são estipulados em função da necessidade de indicarem as posições relativas às diversas datas. Assim, o ponto 0 representa a data inicial (hoje), o ponto 1 indica o final do primeiro período e, assim, sucessivamente.

b) Os intervalos de tempo de todos os períodos são iguais.

c) Os valores monetários só podem ser colocados no início ou no final de cada período, dependendo da convenção adotada. Nenhum valor pode ser colocado ao longo dos períodos, uma vez que eles não são contínuos.

d) Saídas de caixa correspondem aos pagamentos, têm sinais negativos e são representadas por setas apontadas para baixo.

e) Entradas de caixa correspondem aos recebimentos, têm sinais positivos e são representadas por setas apontadas para cima.

1.5 Razão e regra de três simples

Esta unidade de conteúdo buscará auxiliá-lo na compreensão e aplicação da porcentagem, a qual é um conteúdo importantíssimo para o desenvolvimento das aulas seguintes. Mas, antes de lhe apresentar o conceito de porcentagem, é interessante que conheça o que é uma **razão** matemática, uma vez que a porcentagem também é uma razão, porém com características específicas.

Mas o que é uma razão em termos matemáticos?

Na matemática, a razão é o quociente entre dois números. Trata-se de um conceito essencial para o conhecimento matemático, o qual é usado para comparar duas quantidades ou duas medidas.

O conceito de razão surge nos jornais e nas revistas para expressar a concentração de pessoas em uma determinada cidade ou o rendimento do combustível de um veículo.

A concentração de pessoas em uma cidade, que é definida como densidade demográfica, como você viu na disciplina de Estatística Aplicada, é a razão da quantidade de pessoas que moram nessa cidade em relação à área. Outros exemplos mais simples podem ilustrar este conceito, tais como: cada automóvel tem oito assentos, ou ainda cada dia tem 24 horas e, logo, matematicamente teríamos

$\frac{1}{5}$ (1 veículo está para 5 assentos) e

$\frac{1}{24}$ (1 dia está para 24 horas),

respectivamente.

Razão
A palavra razão pode ter diferentes significados. É o que aponta o dicionário de português online Michaelis.
Entre as diferentes significações, razão pode significar "o conjunto das faculdades anímicas que distinguem o homem dos outros animais", O "entendimento ou inteligência humana", ou "a faculdade de compreender as relações das coisas e de distinguir o verdadeiro do falso, o bem do mal; raciocínio, pensamento; opinião, julgamento, juízo". Mas, além destes significados, a palavra razão na matemática possui outra aplicação bem diferente.
A razão representa a relação existente entre grandezas da mesma espécie. Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/definicao/razao%20_1033352.html> Acesso em: 23 jan. 2014.

Para saber mais sobre razão, consulte no endereço ou use o código de barras QR para acessá-lo.
http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/definicao/razao%20_1033352.html

Agora, se a preocupação for verificar o rendimento do combustível utilizado em um determinado automóvel, será necessária a aplicação da famosa regra de três.

Mas, afinal, o que é uma regra de três? Pois bem, para compreender o conceito de regra de três, bem como aplicá-lo, se faz necessário que você saiba dois conceitos básicos: um deles é o de razão, como acabou de ver, e outro é o de proporção ou proporcionalidade, que consiste nas sucessões de uma determinada razão, como, por exemplo, se um veículo possui cinco assentos, então dois possuem 10 assentos, três possuem 15, e assim por diante, o que nos remete à seguinte notação matemática.

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} \ldots$$

E se dividirmos o numerador pelo denominador de cada uma das razões acima, obteremos os mesmos resultados, conforme aqui mostramos.

$$\frac{1}{5} = 0{,}2$$
$$\frac{2}{10} = 0{,}2$$
$$\frac{3}{15} = 0{,}2$$

Como você deve ter percebido, enquanto a razão trata-se de uma fração, a proporção, consiste em um conjunto de duas ou mais razões matemáticas, as quais têm o mesmo quociente. Já a regra de três simples é, na verdade, uma proporção, porém desconhecemos um de seus valores e, portanto, é necessário calcular e, para isso, utilizamos os conceitos de razão e proporcionalidade aqui vistos.

Por exemplo: o nosso modelo será um carro, em que analisaremos o volume de gasolina consumido por quilômetro e o número de quilômetros que podem ser percorridos por hora.

Vamos imaginar que alguém encha o tanque do carro. Essa pessoa registra que foram colocados 45 litros de gasolina e testa o carro, gastando todo esse volume de combustível em um percurso de 405 km. A razão do consumo desse carro será 9 km/litro. Se, por acaso, um dia depois, a pessoa registrar, utilizando o mesmo cálculo, um consumo de 8 km/litro, saberá que o carro está consumindo um pouco mais. A razão ajudará a perceber que o carro precisa de alguns ajustes.

Mas, que tal fazer uma aplicação da razão utilizando a regra de três simples?

Muito bem! Vamos descobrir quantos litros de gasolina serão consumidos para o percurso entre as cidades de Porto Velho e Vilhena.

Para isso nós, conhecemos a distância entre Porto Velho e Ji-Paraná, bem como o consumo de gasolina entre estas cidades. Além disso, já conhecemos a distância entre Porto Velho e Vilhena, conforme quadro a seguir.

<table>
<tr><th>Percurso</th><th>Porto Velho a Ji-Paraná</th><th>Porto Velho a Vilhena</th></tr>
<tr><td>Distância</td><td>360</td><td>729</td></tr>
<tr><td>Litros de gasolina</td><td>40</td><td>?</td></tr>
<tr><td>Consumo de gasolina por quilômetro</td><td colspan="2">$\frac{360}{40} = \frac{729}{x}$
$360x = 729 \cdot 40$
$360x = 29160$
$x = \frac{29160}{360}$
$x = 81$ litros</td></tr>
</table>

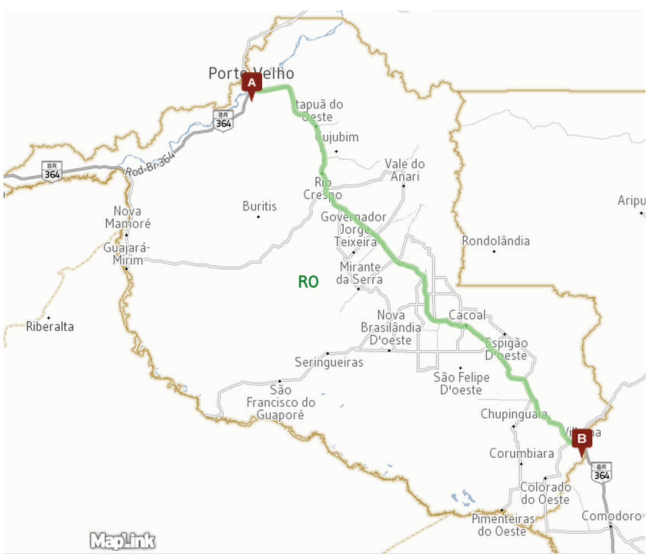


Figura 3 – Mapa do trajeto Porto Velho a Vilhena
Fonte: http://viajeaqui.abril.com.br

1.6 Porcentagem

De acordo com Jacques (2010, p. 168), “a palavra ‘porcentagem’ ou ‘percentagem’ significa literalmente ‘por cento’, isto é, por centésimo; assim, sempre que falamos r% de alguma coisa, queremos dizer simplesmente a fração -ésimo.” Em outra definição extraída do Wikipédia , “é um modo de expressar uma proporção ou uma relação entre 2 (dois) valores (um é a parte e o outro é o inteiro) a partir de uma fração cujo denominador é 100 (cem), ou seja, é dividir um número por 100 (cem)”.Disponível em: < http://pt.wikipedia.org/wiki/Porcentagem> Acesso em: 13 jan. 2013.

Para identificar um número porcentual, utilizamos o símbolo % (se lê por cento). O símbolo está relacionado a uma razão de base 100 (cem), o qual pode ser descrito como:

$$\% = \frac{1}{100}$$

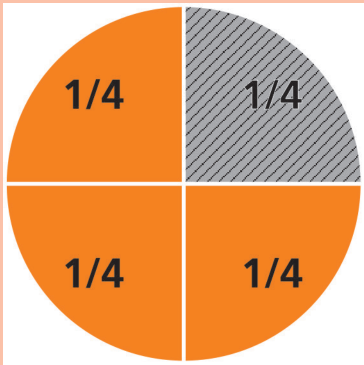
Isso significa dizer que todo número, quando representado como porcentagem, está na verdade relacionado a uma divisão por 100, como aqui exemplificado.

$$5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

O resultado desta divisão gera um outro tipo de taxa muito utilizado na matemática financeira. É a taxa unitária que é encontrada por meio da divisão de uma taxa porcentual por 100. No caso acima, a taxa unitária de 5% é igual a 0,05.

A porcentagem pode assumir duas diferentes perspectivas que podemos denominar de complementar e suplementar, conforme abaixo demonstrado.

<table>
<tr><th>Porcentagem Complementar</th><th>Porcentagem Suplementar</th></tr>
<tr><td>



A pizza inteira foi dividida em 4 pedaços, o que significa que:

4 pedaços = 100% da pizza
ou, em termos matemáticos:

$$\frac{4}{4} = 1 \ pizza$$

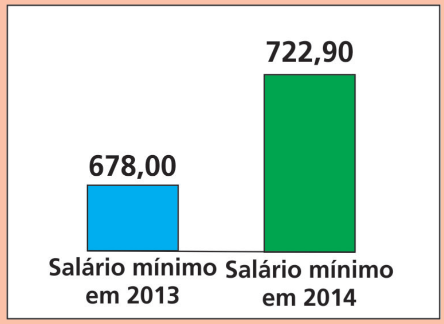
Mas, observou que está faltando um pedaço da pizza?
Como determinar em termos porcentuais?
Veja como é fácil resolver:

$$\frac{1}{4} = 0{,}25 \ pizza$$

0,25 é a taxa unitária, para saber a taxa porcentual basta multiplicar por 100.

$$0{,}25 \cdot 100 = 25\% \ da \ pizza$$

</td><td>



Como se pode observar, neste caso o salário de 2014 é independente, ou seja, não faz parte do salário de 2013. Com isso, para saber qual foi a evolução salarial em termos percentuais, precisamos dividir o salário de 2014 pelo salário de 2013.

$$\frac{722{,}90}{678} = 1{,}066224$$

De forma semelhante ao caso anterior, 1,066224 é a taxa unitária. A taxa porcentual é encontrada ao multiplicarmos por 100.
1,066224*100 = 106,62%
100% está correto? Sim, o cálculo está correto, porém, 100% se refere a 678,00, que é o salário anterior. Então o aumento do salário é 6,62%.
106,62% – 100% = 6,62%.

</td></tr>
</table>

Talvez não tenha ficado muito claro para você quais as principais diferenças entre os tipos de porcentagens que aqui resolvemos classificar como complementares ou suplementares. Por isso, vamos explorar um pouco mais este assunto.

1.6.1 Porcentagem complementar

Nós podemos classificar como porcentagem complementar toda operação, na qual o que se busca descobrir é uma parte do total, ou parte do inteiro. Para clarificar, podemos dar alguns exemplos como os pedaços de uma pizza que foram degustados, os alunos de uma turma que faltaram à aula, a quantidade de dias que você trabalhou em um ano, entre outros vários exemplos.

Você observou que entre todos estes exemplos há algo em comum? É que a porcentagem nunca poderá ser maior que 100%, como mostra o quadro a seguir:

Parte da razão procurada	Porcentagem máxima	Cálculo da porcentagem máxima
Pedaços degustados de uma pizza	Todos os pedaços	$\frac{\textit{pedaços degustados}}{\textit{nº de pedaços em que foi dividida}}$ $\frac{4}{4} = 1 \text{ ou } 100\%$
Alunos faltantes de uma turma	Todos os alunos	$\frac{\textit{alunos faltantes}}{\textit{nº de alunos da turma}}$ $\frac{40}{40} = 1 \text{ ou } 100\%$
Dias trabalhados em um ano	Todos os dias (365)	$\frac{\textit{dias trabalhados}}{\textit{dias do ano}}$ $\frac{365}{365} = 1 \text{ ou } 100\%$

Com certeza ficou bem mais fácil entender, não é mesmo? O conceito de porcentagem complementar que aqui denominamos se deve ao fato de que a porcentagem máxima é igual à unidade 1 (um) ou seja 100. Isso é valido sempre que a porcentagem procurada for uma parte ou parcela de um conjunto.

1.6.2 Porcentagem suplementar

E a porcentagem suplementar? Que características possui para assim ser chamada ?

É importante primeiro observar que esta caracterização é uma forma apenas de facilitar a sua compreensão e aprendizado.

Nesta obra, denominamos como suplementar os cálculos de porcentagem cujos resultados são possíveis de serem maiores do que 100%.

Vamos dar alguns exemplos para facilitar a compreensão.

Neste caso, pode-se ilustrar com o cálculo de aumento salarial que não há limitação quanto ao seu valor máximo, ou seja, o salário pode ter aumento de 5%, 10%, 100%, 200%, etc. Existem outros vários exemplos dos quais ilustraremos alguns no quadro a seguir.

Parte da razão procurada	Porcentagem máxima	Cálculo da porcentagem máxima
Crescimento populacional de um município	É infinita, ou seja, não há limite máximo	Pode ser menor ou maior que 100%
Aumento do salário mínimo	É infinita, ou seja, não há limite máximo	Pode ser menor ou maior que 100%

1.6.3 Cálculo da porcentagem

Agora que você já compreendeu o que é porcentagem e conheceu algumas características, vamos aos elementos dos cálculos porcentuais.

$$\frac{porcentagem}{principal} = \frac{taxa}{100}$$

A porcentagem, representada por ***r***, é o valor que traduz a quantidade de unidades tomadas de outra, proporcionalmente a uma taxa.

Taxa, representada por ***i***, é o valor que traduz a quantidade de unidades tomadas de outra em cada 100.

Principal, denotada por ***p***, é o valor da grandeza em que se calcula a porcentagem.

Assim, podemos representá-la por:

$$\frac{r}{p} = \frac{i}{100}$$

Vamos aplicá-la em alguns casos?

1º Exemplo:

Marcelo fez uma prova de um concurso no último domingo. Ao conferir o gabarito oficial, ele verificou que acertou 27 do total de 36 questões da prova. Qual foi a porcentagem de acerto de Marcelo?

Resolução:

Total de questões: r = 36

Total de acertos: p = 27

$$\frac{27}{36} = \frac{i}{100}$$

$$\frac{i}{100} = 0,75$$

i= 0,75 x 100

i= 75%

Significa dizer que Marcelo acertou 75% das questões da prova.

2º Exemplo:

Em setembro de 1994, logo após o início do Plano Real, o salário era de R$ 70,00. Para 2014, ou seja, quando a atual moeda brasileira completa 20 anos de existência, a Presidente da República sancionou o salário mínimo de R$ 720,00. Qual foi a porcentagem de aumento salarial nestes 20 anos?

Resolução:

Salário inicial em 1994: p = 70

Salário em 2014: r = 720

$$\frac{720}{70} = \frac{i}{100}$$

$$\frac{i}{100} = 10,2857$$

i= 10,2857 x 100

i= 1028,57%

Esta questão é do tipo que denominamos como suplementar e, neste sentido, precisaremos subtrair 100%, que corresponde aos 70 reais do salário inicial.

i= 1028,57% - 100%

i= 928,57%

Logo, o aumento do salário mínimo nos 20 anos da moeda real foi de 928,57%.

Resumo

Nesta aula, você estudou que toda operação financeira – como a concentração de empréstimos, os financiamentos bancários e as dívidas em cartão de crédito – tem quatro componentes essenciais: valor presente; valor futuro; tempo; e taxa de juros.

O **valor presente** é o capital na data zero (início) de uma operação e é representado pela letra P.

O **tempo** é a quantidade específica de tempo de uma operação, que pode ser representada em dias, meses, semestres ou anos, sendo esta definição de tipo de períodos definida entre o credor e o tomador de crédito. O tempo é definido pela letra n (ene).

A **taxa de juros** mantém relação direta com a unidade de tempo, uma vez que esta pode ser aplicada por mês, dia, ano ou qualquer outro prazo estabelecido. Esta é representada na forma de porcentagem seguida da unidade de tempo em que está definida (por exemplo: 6% ao ano, 0,5% ao mês, entre outros) e é representada pela letra i.

O **valor futuro** é o resultado da ação dos juros sobre o valor presente. Sua notação é Fn, sendo n a quantidade de tempo da aplicação.

Você analisou que juros são a valoração do amanhã que decorre, sobretudo, das escolhas que fazemos. É, sobretudo, a remuneração recebida pela abdicação momentânea de usufruir do capital adquirido ou, ainda, é o ônus pago pelo gozo antecipado de um capital a ser adquirido no futuro.

O fluxo de caixa é o conjunto de entradas e saídas de dinheiro (caixa) ao longo do tempo. A elaboração do fluxo de caixa é indispensável na análise de rentabilidade e custos de operações financeiras e no estudo de viabilidade econômica de projetos e investimentos.

Você percebeu que a porcentagem, também chamada de percentagem por alguns autores, é uma medida de **razão** com base 100 (cem). É um modo de expressar uma proporção ou uma relação entre 2 (dois) valores (um é a parte e o outro é o inteiro) a partir de uma fração cujo denominador é 100 (cem), ou seja, é dividir um número por 100 (cem).

Ainda sobre porcentagem, mostramos que para identificar um número porcentual utilizamos o símbolo % (se lê *por cento*). O símbolo está relacionado a uma razão de base 100 (cem), o qual pode ser descrito como:

$$\% = \frac{1}{100}$$

E, por fim, estudamos que a equação do cálculo porcentual é das variáveis porcentagem, taxa e principal, organizadas em forma de razão, em que a porcentagem está para o principal, como a taxa está para 100 (cem), formando-se assim uma igualdade de razões conforme abaixo exposto.

$$\frac{porcentagem}{principal} = \frac{taxa}{100}$$

Atividades de aprendizagem

1. Um cliente da Loja ABC fez uma compra no valor de R$ 350,00. No final da compra, o vendedor informou que a loja está oferecendo descontos de 7% para pagamentos à vista. Ajude o cliente calcular o valor do desconto.

2. De acordo com o IBGE, a população do município de Porto Velho em 2000 era de 334.585 habitantes e em 2010 passou a ser de 428.527. Qual foi o aumento populacional em termos percentuais.

3. Um investidor aplicou R$ 700,00 em títulos de renda fixa e no final de um ano resgatou o valor total (aplicação mais rendimentos) de R$ 760,00. De quanto seria o resgate se aplicasse R$ 2.000,00? (Utilize o conceito de regra de três simples para resolver).

Caro(a) estudante,

Chegamos ao final da primeira aula sobre Matemática Financeira. Nesta aula, os temas foram conceitos básicos da matemática, terminologias de finanças, regra de três simples e porcentagem.

Na próxima aula, abordaremos o tema juros simples.Continue disciplinado(a) em seus estudos e não deixe de realizar as atividades de aprendizagem!

Aula 2. Juros simples

Objetivos:

- avaliar os conceitos básicos da matemática financeira;
- conceituar o regime de capitalização simples;
- identificar técnicas para avaliar a equivalência de capitais a juros simples; e
- relacionar valor presente e valor futuro no regime de juros simples

Prezado(a) estudante,

Esta é a segunda aula da disciplina de Matemática Financeira e os assuntos a serem tratados são sobre os juros simples. Esperamos que, nesta aula, você compreenda bem os conceitos de juros simples, as formas de cálculos e suas aplicações em situações do dia a dia.

Nesta etapa, vamos desenvolver as formulas básicas de juros simples e mostrar suas aplicações por meio de exemplos numéricos.

O regime de juros simples é utilizado no mercado financeiro, notadamente nas operações de curto prazo, em função da simplicidade de cálculo.

Boa aula!!!

2.1 Juros

De acordo com definição do dicionário Aurélio (2013), a palavra juros significa prêmio de dinheiro emprestado ou ainda, como já vimos na aula anterior, que juros representam a remuneração de qualquer título, atribuída ao capital. Os juros podem ser capitalizados segundo dois regimes: juros **simples** e juros **compostos**.

JUROS SIMPLES
De acordo com Mendes e Rodrigues, "no regime de juros simples, a remuneração de um capital aplicado ou de um empréstimo bancário é calculada periodicamente como um percentual constante entre a remuneração (juro) e o capital inicial aplicado ou emprestado". Isso ocorre, pois, segundo outra definição desse mesmo autor, "o juro de cada período futuro da aplicação será sempre calculado pela taxa multiplicada pelo principal inicial" (2007, p. 50).

JUROS COMPOSTOS
De acordo com definição desses mesmos autores (2007, p. 49), "no regime de juros compostos, a remuneração de um capital aplicado ou de um empréstimo bancário é calculada periodicamente como um percentual constante do capital acumulado, ou seja, o montante da soma do capital mais os juros".

Os juros, ou seja, a remuneração pelo empréstimo do dinheiro, existem porque a maioria das pessoas preferem ou precisam do consumo imediato, seja por necessidade de sobrevivência ou simplesmente pela satisfação de um desejo, e claro, estão dispostas a pagar um preço por isto.

Mas, esta possibilidade de tomar dinheiro emprestado e remunerá-lo com juros, somente é possível, por que existem pessoas que possuem recursos excedentes, ou ainda, que não tenham excedentes, porém são capazes de renunciar ao consumo imediato. Nesses casos, é óbvio que o credor deseje ter seu capital pelo tempo do empréstimo, bem como pelo risco de não tê-lo de volta e a isso chamamos de juro

2.1.1 Juros simples – crescimento linear

Sobre a forma do crescimento dos juros no regime de capitalização simples, Puccini (2003, p. 12), ilustra que:

os juros de cada período são sempre calculados em função do capital inicial (principal) aplicado. Os juros do período não são somados ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes. Os juros não são capitalizados e, consequentemente, não rendem juros. Assim, apenas o principal é que rende juros.

Por definição, o juro simples é diretamente proporcional ao capital inicial e ao tempo da aplicação, sendo a taxa por período o fator de proporcionalidade.

Para o cálculo de juros simples, aplicamos a equação:

Juros = valor presente x Taxa x Tempo de aplicação

$J = P \times i \times n$

Para facilitar a assimilação do conhecimento, vamos aplicar a equação dos juros simples a uma operação.

Mariana tomou um empréstimo com sua tia Joana no valor de R$ 350,00 a uma taxa de juros de 2% ao mês. Agora que já se passaram os seis meses desde a realização do empréstimo, ajude Mariana a encontrar o valor dos juros a serem pagos a sua tia.

Resolução:

Valor presente: P = 350

Taxa de juros: i = 2%

Taxa de juros unitária: $i = \frac{2}{100} = 0{,}02 \text{ ao mês}$

Tempo: n = 6

Juros: J = ?

J= P x i x n

J= 350 x 0,02 x 6

J= 7 x 6

J= 42

Mariana deve pagar a sua tia o equivalente a R$ 42,00 de juros.

Com a equação *J= P x i x n* é possível calcular não só os juros, como também a taxa, o período ou até mesmo o valor presente. Mas, caso você queira resolver os problemas relacionados a cada uma destas variáveis de forma mais simplificadas, é possível utilizar uma das equações abaixo que melhor facilite o cálculo de acordo com o que se pede, conforme segue:

Fórmulas derivadas:

$$P = \frac{J}{i \times n} \qquad i = \frac{J}{P \times n} \qquad n = \frac{J}{P \times i}$$

É importante lembrar que, antes de calcular qualquer operação na matemática financeira, a qual envolva tempo e taxa, é imprescindível que estas variáveis estejam na mesma unidade de tempo. A fim de exemplificar, se a taxa está ao mês, a unidade de tempo n deve ser mensal, se a taxa estiver ao ano, também o tempo n dever ser anual, caso contrário o cálculo levará a um resultado incorreto.

Atividades de Aprendizagem

Vamos exercitar um pouco sobre o conteúdo aprendido até aqui!

Resolva os seguintes casos:

1. Meu vizinho me emprestou R$ 150,00, sob a condição de que eu lhe pagasse juros de 2% ao mês. Já faz três meses que ele me emprestou e agora quero lhe pagar os juros. Você pode me ajudar a calcular os juros desta operação?

2. Pedro Henrique emprestou o valor de R$ 300 para o seu irmão e, após passados 10 meses, o seu irmão lhe pagou R$ 45,00 de juros. Mas, como eles não haviam combinado a taxa, ele agora gostaria de saber qual foi a taxa utilizada pelo seu irmão para calcular os juros. Você sabe qual foi a taxa?

3. Vou emprestar a quantia de R$ 800,00 e, no final do período, desejo receber R$ 80,00 de juros. Por quanto tempo devo emprestar o valor acima, se a taxa negociada é de 2% ao mês?

2.2 Montante

De acordo com Gimenes (2009, p. 236), "o montante ou valor futuro no instante n é o resultado da soma dos juros ao capital principal, ou valor presente. O Fn pode ser encontrado pela seguinte fórmula no sistema de capitalização simples:"

Montante = Capital + Juros

a qual podemos expressar algebricamente por:

$$F_n = P + J$$

Vamos compreender utilizando um caso prático!

Temos a aplicação de R$ 2.000 com juros anuais de 36%. Qual o montante acumulado dessa aplicação após sete meses?

O que queremos calcular é F_n, sendo que por definição $F_n = P + J$, ou seja, o desafio é achar J. Vimos há pouco que J é igual a P x i x n. Agora, precisamos fazer a adaptação, já que nossa taxa de juros é anual e estamos falando de um ano não inteiro.

A partir do problema proposto, é possível organizar os dados nos seguintes aspectos:

Valor presente: P = 2000

Taxa de juros: i = 36% ao ano = $\frac{36}{12} = 3\%$ *ao mês*

Tempo: n = 7 meses

Você observou que a taxa de juros era anual e a unidade tempo mensal? Para resolver este problema, nós convertemos a taxa em mensal, de uma forma muito simples, dividindo a taxa de juros anual por 12 (que é o número de meses do ano).

$J = P \times i \times n$

$J = 2000 \times 0{,}03 \times 7$

$J = 6 \times 7$

$J = 42$

Os juros gerados no período são de R$ 42,00, mas e o montante qual será?

Você possui ou já possuiu uma conta poupança? Caso a sua resposta tenha sido positiva, com certeza já depositou algum valor e, depois de alguns meses, ao retirar o extrato bancário, percebeu que, além do valor depositado, foi acrescida certa quantia relativa aos juros e você pode sacar o valor depositado e os rendimentos inclusive.

Este total (valor depositado + juros) é chamado de montante ou valor futuro, como veremos nesta seção.

$$F_n = P + P \times i \times n$$

Observe que, na equação, montante ou valor futuro, há uma soma e a variável P aparece nos dois termos da soma. Com isso, podemos simplificar a equação se o colocarmos em evidência. Faremos o seguinte procedimento:

I Colocaremos P em evidência;

II A divisão de P por P será igual a 1;

III A divisão P x i x n será igual a n x i.

$$F_n = P + P \times i \times n$$

$$F_n = P\,(1 + i \times n)$$

Em outras palavras, o montante (Fn) é dado pelo capital (P) multiplicado pelo fator de capitalização (1 + i x n). Assim, determinamos o fator de capitalização no regime de juros simples pela expressão:

$$(1 + i \times n)$$

Gimenes (2009, p. 238) define que, "uma vez que a fórmula para o cálculo do valor Futuro já existe, basta isolar o P, deixando-o como incógnita". Desta forma, vamos utilizar F_n = P(1 + i x n), como base e seguiremos os seguintes passos:

I o nosso objetivo é descobrir o valor presente P e, para isso, temos que isolar o P em nossa equação;

II o termo *(1+i x n)* que está multiplicando ao valor futuro, passaremos para o outro lado da igualdade, dividindo, já que a divisão é o inverso da multiplicação. Assim, encontraremos a equação do valor presente em juros simples.

$$F_n = P\,(1 + i \;\; x\, n)$$

$$P = \frac{F_n}{(1+i\times n)}$$

A equação do valor presente também pode ser descrita na forma de

$$P = F_n \frac{1}{(1+i\times n)}$$

De acordo com o enunciado de Gimenes (2009, p. 238), **P** representa o valor presente ou original de um valor futuro $\mathbf{F_n}$ ou final descapitalizado à taxa **i** (expressa em sua forma decimal) **n** vezes, de forma linear (juros simples).

Vamos analisar alguns exemplos?

1. Foram aplicados $9.500 durante cinco meses à taxa de juros de 1,9% ao mês. Calcule o valor do resgate no regime de juro simples.

Definição de variáveis:

Valor presente	P = 9500
Taxa de juros	i = 1,9% ao mês= $\frac{1,9}{100} = 0,019$ *ao mês*
Tempo	n = 5 meses
Valor do Resgate	F_n= ?

Resolução:

$$F_n = P(1 + i \times n)$$
$$F_n = 9500(1 + 0,019 \times 5)$$
$$F_n = 9500(1 + 0,095)$$
$$F_n = 9500 \times 1,095 = 10.402,50$$

O valor do resgate será de R$ 10.402,50.

2. Calcule o prazo necessário para duplicar o investimento inicial de $ 4.000, considerando a taxa mensal de juro de 4% no regime de juro simples.

Definição de variáveis:

Valor presente	**P = 4000**
Valor do resgate	**Fn = 2 * 4000 = 8000 (o dobro de P)**
Taxa de juros	**i = 4% ao mês** $= \frac{4}{100} = 0,04$ *ao mês*
Tempo	**n = ?**

Resolução:

$$F_n = P(1 + i \times n)$$
$$8000 = 4000(1 + 0,04 \times n)$$

$$\frac{8000}{4000} = (1 + 0,04 \times n)$$
$$2 = 1 + 0,04n$$
$$2 - 1 = 0,04n$$
$$0,04n = 1$$
$$n = \frac{1}{0,04} = 25$$

São necessários 25 meses para dobrar o capital, dadas as condições acima.

3. Um empréstimo de $ 3.480,00 foi resgatado cinco meses depois pelo valor de $ 3.949,80. Calcule a taxa de juro simples desta operação.

Definição de variáveis:

Valor presente	P = 3480
Valor do resgate	F_n = 3949,80
Tempo	n = 5 meses
Taxa de juros	i = ?

Resolução:

$$F_n = P(1 + i \times n)$$
$$3949,8 = 3480(1 + i \times 5)$$

$$\frac{3949,8}{3480} = (1 + i \times 5)$$
$$1,135 = 1 + 5i$$
$$1,135 - 1 = 5i$$
$$5i = 0,135$$
$$i = \frac{0,135}{5} = 0,027$$

A taxa i = 0,027 é uma taxa unitária e, para transformá-la em taxa percentual, basta que a multipliquemos por 100.

$$i = 0,027 \times 100 = 2,7\% \text{ ao mês}$$

Mas, a melhor forma de assimilar bem um conteúdo matemático é praticando. Então, que tal praticar um pouco com algumas atividade de aprendizagem?

Atividades de aprendizagem

4. Calcule o montante resultante de uma aplicação de $ 27.000,00, à taxa de 1,5% ao mês durante três meses.

5. Um capital de $ 40.000,00 aplicado durante dez meses, rende juro de $ 8.000,00. Determine a taxa correspondente.

2.3 Juros simples em períodos não inteiros

No dia a dia, muitas vezes nos deparamos com situações em que o tempo de aplicação será não inteiro. Por exemplo, a taxa de juros é mensal mas o dinheiro ficou aplicado 20 dias. É razoável, neste caso, tanto para o credor como para o devedor, que os juros sejam proporcionais ao tempo de efetiva aplicação.

Mas, como calculamos estas frações de períodos?

Pense, por exemplo, em um empréstimo contraído com uma taxa de juros de 6% ao ano e do qual queremos saber o valor de quitação no prazo de 15 meses.

Não poderíamos simplesmente aplicar a taxa de juros anual, não é mesmo?

Se ocorrer isso – ou qualquer outra situação em que haja "discordância" entre o tempo e a referência temporal da taxa de juros,– precisamos utilizar recursos matemáticos para efetuar o cálculo dos juros corretamente.

Nosso foco será o ajuste para que ela fique em harmonia com o tempo n.

Para chegar a isso, dividimos a taxa de juros pela quantidade de tempo inferior. Por exemplo: se estamos falando de uma taxa de juros de 6% ao ano e de um prazo de 15 meses, devemos dividir i (6% por 12 meses) e assim teremos a taxa de 0,5% ao mês, conforme quadro a seguir.

$$6\%\ \textit{ao ano} = \frac{6\%}{12\ \textit{meses}} = 0{,}5\%\ \textit{ao mês}$$

O recurso de dividir a taxa só funciona com juros simples ou taxas nominais. Quando se trabalha com taxas de juros efetivas em juros compostos, é necessário utilizar o conceito de equivalência de taxa. Por ora vamos tratar apenas de taxa em juros simples. Taxas nominais, efetivas e equivalentes veremos em outras aulas.

Isso depende da regra da instituição financeira e da modalidade de depósitos que você realizou. Na poupança, por exemplo, os juros são calculados e pagos somente na data de aniversário mensal de seu depósitos. Já o **CDB**, apesar de a taxa ser mensal, a partir do 30º dia de aplicação, esta modalidade lhe auferirá pagamento de juros diariamente. Neste caso, vamos supor que a taxa de juros mensal seja de 0,82%. Qual seria a taxa diária?

$$0{,}82\% \text{ ao mês} = \frac{0{,}82\%}{30 \text{ dias}} = 0{,}027333\% \text{ ao mês}$$

Você observou que, no caso anterior, a taxa era anual e queríamos encontrar a taxa mensal e então dividimos a taxa por pelo número de meses do ano ou seja 12 meses. Neste último caso, nós tínhamos a taxa mensal e queríamos a taxa diária e, portanto, a dividimos por 30.

De modo análogo, nós podemos converter a taxa de juros anual em taxa diária. Mas, por quanto dividiremos? E por que, no caso de taxa mensal para diária, nós dividimos por 30, se existem meses com 30, 31, 28 ou 29 dias?

Muitas perguntas não é verdade? Mas, para ajudá-lo a compreender melhor vamos introduzir um novo conceito, o de juro comercial ou juro exato, conforme se segue.

O que é **CDB** (Certificado de Depósito Bancário)?
O CDB (Certificado de Depósito Bancário) é um título de captação de recursos emitido pelos bancos, que funciona como um empréstimo que você faz à instituição financeira, recebendo uma remuneração em troca. Ao final da aplicação, o valor investido é acrescido de juros. O prazo para o resgate é definido pelo banco, mas o investidor pode retirar antes a sua rentabilidade sem prejuízos, se respeitar o prazo mínimo de aplicação, que varia de um dia a um ano, dependendo da remuneração desejada. Disponível em: <http://www.brasil.gov.br/economia-e-emprego/2012/04/investidor-pode-antecipar-resgaste-em-certificado-de-deposito-Bancario-CDB-sem-prejuizo> Acesso em: 23 jan. 2014.

Para saber mais sobre CDB acesse o *site* http://www.brasil.gov.br/sobre/economia/investimentos/cdb-certificado-de-deposito-bancario
Ou, se você possui Smartphone, use o leito de código de barras QR para acessar.

2.3.1 Juro comercial e juro exato

Se alguém nos perguntar quantos dias tem um ano civil, respondemos com toda a certeza que tem 365 ou ainda 366, se este for bissexto. Pois bem, mas mudemos um pouquinho a pergunta para o seguinte. Quantos dias tem o ano comercial? Será que a resposta será a mesma?

Se a sua resposta foi não, você acertou, pois o ano comercial tem 360 dias e, portanto, o mês comercial tem 30 dias.

Qual é a definição de curto prazo?
De acordo com o decreto-lei nº 2.394, de 21.12.1987, que define sobre a tributação do Imposto de Renda incidente sobre rendimentos auferidos em operações financeiras de curto prazo, "considera-se operação financeira de curto prazo aquela de prazo igual ou inferior a 28 (vinte e oito) dias, contados da data de aquisição de títulos ou das aplicações de recursos, até a data da subsequente cessão, liquidação ou resgate de títulos, obrigações ou aplicações de renda fixa." Há de se destacar, porém, que há definições para o conceito de curto prazo que são adversas a esta, como, por exemplo, a resolução do Conselho Federal de Contabilidade (CFC) nº 1.296, de 17.09.2010, que considera de curto prazo os investimentos que têm vencimento em três meses ou menos, a contar da data da aquisição.

De acordo com definição de Crespo (2001, p. 86), se considerarmos o ano de 360 dias obteremos o juros simples comercial, "entretanto, podemos obter o juro fazendo uso do número exato de dias do ano (365 dias, ou 366 dias, se o ano for bissexto). Neste caso, o resultado é denominado juros simples exato".

No próximo tópico, você aprenderá a calcular o número exato de dias entre duas datas.

2.3.2 Contagem entre duas datas

Para determinar a data de vencimento e o prazo das aplicações, podemos usar uma tábua. O uso é simples, bastando subtrair, do número de dias correspondentes à data posterior, o número que corresponde à data anterior. Há apenas exceção nos anos bissextos, nos quais se deve acrescentar 1 ao resultado para contemplar o dia 29 de fevereiro.

Tabela 1 – Contagem de dias entre duas datas

JAN	FEV	MAR	ABR	MAIO	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349

JAN	FEV	MAR	ABR	MAIO	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31		90		151		212	243		304		365

Fonte: Samanez (2010, p.10)

Que tal fazer algumas aplicações desta regra?

Pois bem, imagine que no dia 20 de maio você tenha feito um empréstimo no valor R$ 500,00 a uma taxa 3% ao mês e, no dia 27 de julho do mesmo ano, você procurou o credor para quitar a sua dívida. Determine o tempo e o montante da dívida. Dica: para determinar o tempo, utilizaremos a tábua acima.

Definição de variáveis:

Data posterior	27/07/XX = 208
Data anterior	20/05/XX = 140
Tempo	n = 68 dias
Taxa de juros	$3\%\text{ ao mês, ou } = \frac{3}{10} = 0,1\%\text{ ao dia ou } \frac{0,1}{100} = 0,001\text{ ao dia}$
Valor presente	P = 500
Valor Futuro	Fn= ?

Resolução:

$$F_n = P(1 + i \times n)$$

$$F_n = 500(1 + 0,001 \times 68)$$

$$F_n = 500(1 + 0,068)$$

$$F_n = 500 \times 1,068 = 534$$

Resumo

Para concluir a nossa aula, vamos recordar algumas fórmulas que vimos até aqui, lembrando que todas são aplicáveis somente ao regime de capitalização de juros simples.

Vimos que juros que é a remuneração recebida pela abdicação momentânea de usufruir do capital adquirido, ou ainda é o ônus pago pelo gozo antecipado de um capital a ser adquirido no futuro. Pode-se de outro modo afirmar que juros representam a remuneração de qualquer título, atribuída ao capital, podendo ser capitalizados segundo dois regimes: juros **simples** e juros **compostos**.

Os juros simples, foco desta aula, são assim denominados, pois a cada intervalo de tempo sempre são calculados sobre o capital inicial emprestado ou aplicado. Em outras palavras, os juros auferidos no período não são somados ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes e, por consequência, não rendem.

Sendo a base de cálculo de juros simples, o valor presente, a apuração dos juros devidos é dada por:

Juros = Valor presente x Taxa x Tempo de aplicação

Daí apuramos a equação de juros na forma aqui exposta,

J= P x i x n

O montante é o valor resultante da soma do capital aplicado ou emprestado acrescido de juros: **Montante = Capital + Juros.**

Para calcular o montante, ou seja o valor futuro Fn, utilizamo-nos da equação:

$$F_n = P(1+i \times n)$$

Assim, o montante (F_n) é dado pelo capital (P) multiplicado pelo fator de capitalização ($1 + i \times n$), sendo ($1 + i \times n$) o fator de capitalização no regime de juros simples.

De outro modo, o capital de uma aplicação ou empréstimo pode ser calculado a partir do valor futuro (F_n) dividido pelo fator de capitalização, o que resulta na equação do valor presente (P), na seguinte forma:

$$P = \frac{F_n}{(1 + i \times n)}$$

A equação do valor presente também pode ser descrita na forma de

$$P = F_n \frac{1}{(1 + i \times n)}$$

Você viu que o ano comercial é composto de 360 dias e que o mês comercial tem 30 dias.

Você aprendeu ainda que, quando trabalhamos com unidade de tempo fracionadas, deveremos colocar todas as mensurações de tempo na mesma medida (a menor possível) e adequar a taxa de juros para o período, por meio da divisão proporcional.

Atividades de Aprendizagem

6. Um capital de R$ 500 aplicado em 15 de janeiro a juros simples de 0,2% ao dia foi resgatado em 12 de maio do mesmo ano. Determine o valor de resgate.

7. José possui uma nota promissória assinada em 15 de abril com vencimento para 125 dias exatos. Em que data a dívida vencerá?

Prezado(a) estudante,

Chegamos ao final da segunda aula sobre Matemática Financeira. Nela você teve oportunidade de aprender sobre o cálculo de valor presente e valor futuro em juros simples, bem como o cálculo de juros em períodos não inteiros.

Na próxima aula, abordaremos o tema juros compostos.

Continue estudando e até a próxima aula!

Aula 3. Juros compostos

Objetivos:

- identificar o cálculo do montante e o valor principal no regime de juros compostos; e

- indicar e aplicar a equivalência de capitais a juros compostos.

Prezado (a) estudante,

Esta é a terceira aula da disciplina de Matemática Financeira. Na aula anterior, você aprendeu o que são juros simples e algumas de suas principais aplicações. Nesta aula, exploraremos um novo conteúdo chamado de **juros compostos.**

Boa aula!!!

3.1. Diferença entre juros simples e compostos

De acordo com Mendes e Rodrigues (2007, p. 78), o que diferencia o regime de juros simples do regime de juros compostos é que, enquanto "no regime de juros simples os juros são calculados sobre o capital inicialmente aplicado", no regime de juros compostos "os juros são calculados sobre o montante gerado até o período anterior".

De acordo com texto extraído do site Só Matemática "a maioria das operações envolvendo dinheiro utiliza juros compostos." Nelas estão incluídas as "compras a médio e longo prazo, compras com cartão de crédito, empréstimos bancários, as aplicações financeiras usuais, tais como a caderneta de poupança e as aplicações em fundos de renda fixa".

Ainda de acordo com definição encontrada no Só Matemática ,"raramente encontramos uso para o regime de juros simples", sendo este aplicado somente em "operações de curtíssimo prazo" e "operações de desconto simples de duplicatas” ou no pagamento antecipado de dívidas.

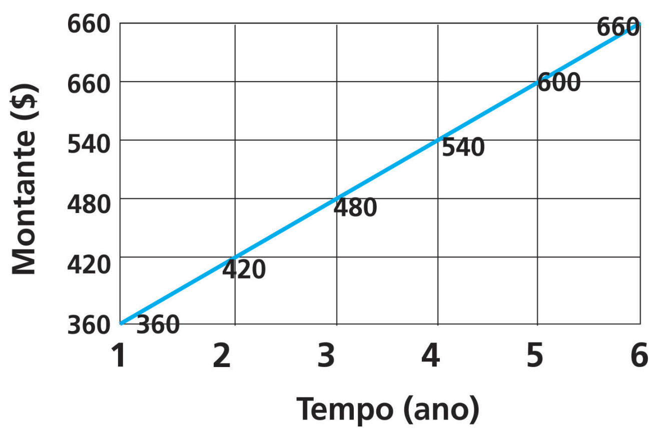
Vamos entender na prática esta diferença e como se dá o comportamento gráfico de cada um dos regimes de capitalização, a partir do seguinte caso.

Uma empresa X possui um capital de R$ 300,00 e deseja fazer a aplicação a uma taxa de 20% ao ano, pelo período de seis anos. Vamos observar o aumento do montante a cada período em cada um dos regimes.

Pelo regime de capitalização simples, é possível observar que o aumento de juros a cada período é de R$ 60,00, conforme se observa na tabela a seguir.

Período	Equação do Montante $F_n = P(1 + in)$	Valor do Montante (F_n)
1	F1 = 300(1 + 0,2 x 1)	360
2	F2 = 300(1 + 0,2 x 2)	420
3	F3 = 300(1 + 0,2 x 3)	480
4	F4 = 300(1 + 0,2 x 4)	540
5	F5 = 300(1 + 0,2 x 5)	600
6	F6 = 300(1 + 0,2 x 6)	660

Observe que, no gráfico, o cálculo da operação acima, realizada pelo regime de juros simples, forma uma reta. Pois bem, isso ocorre pelo motivo de que, sendo os juros calculados por uma taxa fixa e sobre o valor inicialmente emprestado ou aplicado, auferirá ao credor ao final de cada período valores de juros iguais, assemelhando-se a uma equação de equação de 1° grau (do tipo y = ax + b).



No regime de capitalização composta, observa-se que o montante do primeiro período é idêntico ao calculado em juros simples. Porém, a partir do segundo período, o volume do montante é cada vez maior do que quando calculado como juros simples. Pelo exemplo aqui dado, verifica-se que, ao final de seis anos, enquanto em juros simples se obteve o montante de R$ 660,00, pelo regime de juros compostos o montante acumulado em período equivalente foi de R$ 895,80.

Percebeu a amplitude desta diferença? Mas por que isso ocorre? Em juros compostos o acúmulo de juros é bem maior, devido ao método de cálculo que cobra juros sobre os juros gerados nos períodos anteriores, de onde vem o conceito popular de juros sobre juros, como você já deve ter ouvido falar.

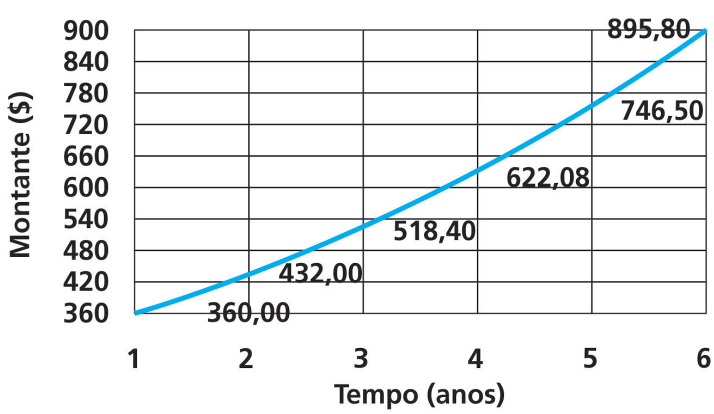
Período	Equação do Montante $F_n = P(1 + i)^n$	Valor do Montante (Fn)
1	$F_1 = 300(1 + 0,2)^1$	360,00
2	$F_2 = 300(1 + 0,2)^2$	432,00
3	$F_3 = 300(1 + 0,2)^3$	518,40
4	$F_4 = 300(1 + 0,2)^4$	622,08
5	$F_5 = 300(1 + 0,2)^5$	746,50
6	$F_6 = 300(1 + 0,2)^6$	895,80

Orientações para realização do cálculo de F_n na calculadora científica Casio, modelo fx-82MS.

Para calcular $F_1 = 300(1 + 0,2)^2$, faça os seguintes procedimentos:

$$300 \times (1 + 0,2) \wedge 2 =$$

Graficamente falando, o sistema de juros compostos apresenta uma curva ascendente indicando o seu comportamento exponencial proveniente da equação $F_n = P(1 + i)n$. Agora que você percebeu a diferença existente entre os regimes de capitalização simples e composta, que tal avançarmos!



Vamos conhecer como é encontrado o valor futuro, ou seja, o montante, em uma operação financeira no regime de juros compostos.

3.2 Cálculo do valor futuro em juros compostos

Como você viu no texto acima, diferentemente do regime de juros simples em que os juros são calculados somente sobre o capital inicial, ou seja, sobre o valor presente da operação, no regime de juros compostos, os juros são calculados sobre o valor principal inicial acrescido dos juros obtidos até o período anterior e, por isso, são denominados de juros compostos e daí a expressão popular muito conhecida de juros sobre juros.

Para a construção da expressão para cálculo do montante no regime de juros compostos, consideramos um principal P aplicado a juros compostos, à taxa de juros i. Consideraremos neste caso específico que o capital aplicado seja $ 100, a uma taxa de 20% ao ano, em que:

Período	Definição de cálculo	Cálculo
1	$F_1 = P(1 + i)$	$F_1 = 100\ (1 + 0{,}2) = 120$
2	$F_2 = F1\ (1 + i)$ Podemos substituir F_1 por $P\ (1 + i)$, dada a identidade $F_1 = P\ (1 + i)$, donde teremos $F_2 = [P(1 + i)]\ (1 + i)$ Como $(1 + i) \times (1 + i)$ e igual a $(1 + i)^2$, logo temos $\mathbf{F_2 = P(1 + i)^2}$	$F_2 = 100\ (1 + 0{,}2)^2 = 144$
3	$F_3 = F_2\ (1 + i)$ De forma análoga, substituiremos F_2 pela sua identidade $P(1+ i)^2$ $F_3 = [P(1 + i)^2]\ (1 + i)$ Como $(1 + i)^2 \times (1 + i)$ e igual a $(1 + i)^3$, logo temos $\mathbf{F_3 = P(1 + i)^3}$	$F_3 = 100\ (1 + 0{,}2)^3 = 172{,}80$
n	E assim está formado o conceito da equação de juros período que, em sua forma geral, podemos dizer que F_n é igual a $P(1 + i)^n$, donde $\mathbf{F_n = P(1 + i)^n}$	

Como bem demonstrado acima, pode-se deduzir que o valor futuro no enésimo período será expresso na forma da equação.

$$F_n = P(1 + i)^n$$

Qual o valor de resgate de uma aplicação de $ 12.000 em um título pelo um prazo de oito meses à taxa de juros composta de 2,5% ao mês?

Definição das variáveis:

Valor presente	P = 12000
Taxa de juros	$i = 2{,}5\%\ \text{ao mês ou} = \dfrac{2{,}5}{100} = 0{,}025$
Tempo	n = 8 meses
Valor futuro	Fn= ?

Resolução:

Para compreender a resolução do problema proposto, conforme aqui exposto, é importante observar algumas regras das operações matemáticas.

1º Primeiro, devem-se resolver as operações no interior dos parênteses. Neste caso 1 + 0,025;

2º Em seguida, resolve-se a potência;

3º E finalmente a multiplicação.

$$F_n = P(1+i)^n$$
$$F_n = 12000(1+0{,}025)^8$$
$$F_n = 12000(1{,}025)^8$$
$$F_n = 12000 \times 1{,}2184$$
$$F_n = 14.620{,}83$$

Conforme calculado, o valor futuro procurado é igual a R$ 14.620,83.

Atividades de aprendizagem

1. Determinar o valor acumulado no final de seis anos, no regime de juros compostos, com uma taxa efetiva de 10% ao ano, a partir de um investimento inicial de $ 2.000.

2. Foram emprestados $ 8.000 durante dez meses à taxa de juro de 2,5% ao mês. Calcule o valor devolvido no final do empréstimo.

3.3 Cálculo do capital – fator de capitalização

Partindo dos postulados explorados acima nesta seção, é possível afirmar que o valor futuro no regime de juros compostos é obtido a partir do valor aplicado (P) multiplicado a um fator de capitalização.

Além disso, pela equação $F_n = P(1 + i)^n$ permite-se determinar que o fator de capitalização em juros compostos é dada por $(1 + i)^n$.

De modo análogo ao que mostramos na aula de juros simples, dado um determinado montante (F_n), é possível encontrar o valor do capital inicial (P), bastando para isso multiplicar o valor futuro pelo fator de descapitalização, conforme aqui mostraremos.

Tomando como verdadeira a expressão $F_n = P(1 + i)^n$, temos que:

$$P(1+i)^n = F_n$$

$$P = \frac{F_n}{(1+i)^n}$$

Ou ainda que,

$$P = F_n \frac{1}{(1+i)^n}$$

Assim, o fator de descapitalização no regime de juros compostos é dado pela expressão:

$$\frac{1}{(1+i)^n}$$

Determinar o valor do investimento inicial que deve ser realizado no regime de juros compostos, com uma taxa efetiva de 1% ao mês, para produzir um montante acumulado de $ 2.000 no final de 12 meses.

Definição das variáveis:

Valor presente	P = ?
Taxa de juros	$i = 1\%\ ao\ mês\ ou = \frac{1}{100} = 0{,}01$
Tempo	n = 12 meses
Valor futuro	$F_n = 2000$

Resolução:

$$P = \frac{Fn}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{2000}{(1+0{,}01)^{12}}$$

$$P = \frac{2000}{(1{,}01)^{12}}$$

$$P = \frac{2000}{1{,}12682}$$

$$P = 1774{,}90$$

Para produzir o montante de R$ 2.000,00 no prazo de 12 meses a uma taxa de juros de 1% ao mês, é necessário aplicar o valor presente de R$ 1.774,90.

Orientações para realização do cálculo de P na calculadora científica Casio, modelo fx-82MS.

Para calcular, $P = \dfrac{2000}{(1+0,01)^{12}}$

faça os seguintes procedimentos:

$$2000 \div (1+0,01) \wedge 12$$

Vamos parar um pouco para você exercitar o que aprendeu!

Atividades de aprendizagem

3. Você necessita de $ 12.000 daqui a cindo meses. Calcule que valor deverá aplicar na data de hoje, considerando a taxa de juro igual a 2% ao mês e no regime de juros compostos. Caso você resolvesse depositar daqui a um mês qual valor deveria ser depositado?

4. Depois de 300 dias, o valor final de uma operação foi de $ 16.298,14. Calcule o valor aplicado considerando a taxa de juro de 2,35% ao mês.

3.4 Cálculo da taxa de juros compostos

Aprendemos a calcular o valor presente e futuro, mas como calcular a taxa de juros?

Como você verá, também é bastante simples. Para demonstrar a fórmula, partiremos da equação principal de juros compostos que é a determinação do valor futuro $F_n = P(1 + i)^n$, conforme aqui definiremos.

$$\mathbf{F_n = P(1+i)^n}$$

Como o nosso objetivo é encontrar a equação da taxa de juros, vamos isolar i, conforme o passo a passo no quadro a seguir.

Equação do valor futuro	$\mathbf{F_n=P(1+i)}$
A variável P que está multiplicando a (1 + i)n passa a ser dividindo para o outro lado da igualdade (denominador)	$\frac{F_n}{P} = (1+i)^n$
O próximo passo é retirar o n, e como n é uma potência deve passar para o outro lado da equação como raiz n que é o inverso da potência	$\sqrt[n]{\frac{F_n}{P}} = 1+i$
Na etapa anterior ainda restou 1 + i. Como queremos isolar i, basta passar 1 que está somando, para o outro lado da igualdade subtraindo. Assim encontramos a equação desejada	$i = \sqrt[n]{\frac{F_n}{P}} - 1$

Em outras palavras, a taxa de juros composta pode ser encontrada utilizando-se da seguinte expressão:

$$i = \sqrt[n]{\frac{F_n}{P}} - 1$$

Com a equação acima, é possível resolver problemas nos quais se busca descobrir a taxa de juros utilizada, como no exemplo a seguir.

Exemplo:

Depois de doze meses de aplicação de $ 12.000, foi resgatado o valor de $ 16.520. Calcule a taxa de juro mensal da aplicação.

Definição das Variáveis:

Valor presente	P = 12000
Taxa de juros	i = ?
Tempo	n = 12 meses
Valor futuro	Fn = 16520

Resolução:

$$i = \sqrt[n]{\frac{F_n}{P}} - 1$$

$$i = \sqrt[12]{\frac{16520}{12000}} - 1$$

$$i = \sqrt[12]{1,3767} - 1$$
$$i = 1,027 - 1$$
$$i = 0,027$$

Mas, lembre-se de que a taxa que encontramos é unitária e, para transformá-la em porcentual, deve-se multiplicá-la por 100.

i =0,027 × 100= 2,7% ao mês

A taxa de juros no problema acima é igual a 2,7% ao mês.

Orientações para realização do cálculo de i na calculadora científica Casio, modelo fx-82MS.

Para calcular, $i = \sqrt[12]{\frac{16520}{12000}} - 1$

faça os seguintes procedimentos:

a) Cálculo de $i = \sqrt[12]{\frac{16520}{12000}} - 1$

Na calculadora

$$12shift\sqrt[x]{\ }(16520 \div 12000)$$

b) Com resultado encontrado subtrairemos 1:

1,027 - 1=

Atividades de aprendizagem

5. Um investimento inicial de $ 1.000 produz um valor acumulado de $ 1.150 no final de dez meses. Determinar a taxa de rentabilidade mensal desse investimento, no regime de juros compostos.

6. Determinar a taxa mensal composta de juros de uma aplicação de $ 30.000 que produz um montante de $ 34.689,10 ao final de um semestre.

3.5 Cálculo do tempo – número de períodos

De modo análogo às expressões anteriores podemos aplicar a fórmula do cálculo de períodos no regime de juros compostos, a partir da expressão do montante $F_n = P(1 + i)^n$, conforme veremos abaixo:

$$F_n = P(1+i)^n$$

$$\frac{F_n}{P} = (1+i)^n$$

Até agora, foi fácil, porém o nosso objetivo é isolar n, o que nos dificulta um pouco, pois para a resolução temos que recorrer a uma propriedade de logaritmo natural, a qual define que:

$$\ln x^k = k \times \ln x$$

Por esta propriedade, poderemos separar o n do termo $(1+i)^n$, conforme mostra o desenvolvimento abaixo.

Uma observação importante é que, para manter a igualdade da equação, temos que aplicar a função logarítmica natural nos dois termos. Assim,

$$\frac{F_n}{P} = (1+i)^n$$

Quando aplicado ln em ambos os termos passa a ser:

$$\ln\left(\frac{F_n}{P}\right) = \ln(1+i)^n$$

Utilizando-se da propriedade **$\ln x^k = k \times \ln x$**, temos que

$$\ln\left(\frac{F_n}{P}\right) = n \times \ln(1+i)$$

Agora que n está multiplicando a $\ln(1+i)$, basta passar o termo $\ln(1+i)$ para o outro lado da igualdade por meio da divisão e assim teremos a equação do cálculo do número de períodos em juros compostos.

$$n = \frac{\ln\left(\frac{F_n}{P}\right)}{\ln(1+i)}$$

Vamos aplicar a equação do cálculo de número de período em juros compostos no caso abaixo.

Uma aplicação de \$ 3.600, com taxa de juro de 1,69% ao mês, gerou o resgate de \$ 4.116,50. Calcule a duração desta aplicação.

LOGARITMO NATURAL
Na matemática, o logaritmo de base *b*, maior que zero e diferente de 1, é uma função que faz corresponder aos objectos *x* a imagem *y* tal que $b^y = x$. Usualmente é escrito como $\log_b x = y$.
Por exemplo: $2^3=8$, portanto $\log_2 8=3$. Em termos simples o logaritmo é o expoente que uma dada base deve ter para produzir certa potência.
O logaritmo natural ou neperiano é o logaritmo de base *e*, onde *e* é um número irracional aproximadamente igual a 2,718281828459045... chamado de número de Euler. Os logaritmos neperianos têm as mesmas propriedades operacionais que os demais logaritmos. Porém, aqui não vamos detalhar todas elas, pois não seria interessante para este estudo, mas apenas duas que nos auxiliarão no cálculo do período das operações financeiras (aplicações ou empréstimos) no sistema de juros compostos.
A primeira delas é que ln 1 = 0 (logaritmo natural de 1 é igual a zero); e
A segunda é de que $\ln x^k = k \times \ln x$.
Disponível em: < http://www.ilea.ufrgs.br/radioisotopos/Logaritmo%20e%20Exponencial.pdf>
Acesso em: 15 set. 2013.

Descrição das variáveis

Valor presente	P = 3600
Taxa de juros	$i = 1,69\%\ ao\ mês = \frac{1,69}{100} = 0,0169$
Tempo	n = ?
Valor futuro	$F_n = 4116,50$

Resolução:

$$n = \frac{ln\left(\frac{F_n}{P}\right)}{ln(1+i)}$$

$$n = \frac{ln\left(\frac{4116,5}{3600}\right)}{ln(1+0,0169)}$$

$$n = \frac{ln(1,14347)}{ln(1,0169)}$$

$$n = \frac{0134069}{0,016759} = 7,99995$$

$$n = 8$$

O tempo da aplicação, denominado de **n** é igual a 7,99995e, por arredondamento, podemos dizer que n é igual a oito meses.

Orientações para realização do cálculo de n na calculadora científica Casio, modelo fx-82MS.

a) Para calcular, $ln\left(\frac{4116,5}{3600}\right)$ faça os seguintes procedimentos:

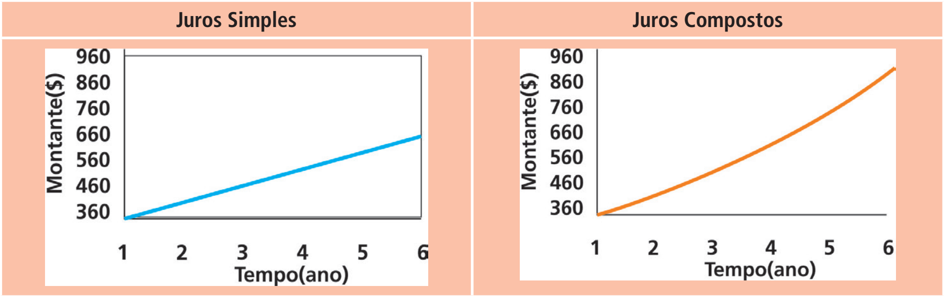
ln(4116,5 ÷3600) =

b) Para calcular, ln(1+0,0169) faça os seguintes procedimentos: ln(1+0,0169)=

Resumo

Você estudou a diferença existente entre juros simples e compostos e pôde perceber que, no regime de capitalização composta, o montante do primeiro período é idêntico ao calculado em juros simples. Porém, a partir do segundo período, o volume do montante é cada vez maior do que quando calculado como juros simples. Isso ocorre porque, enquanto no regime de juros simples os juros são calculados sobre o capital inicial, em juros compostos os juros calculados são somados ao capital a cada período, formando, assim, uma nova base de cálculo.

Comportamento Gráfico do Montante



Fonte: próprio autor

Mostramos também que o regime de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro e, portanto, o mais útil para cálculos de problemas do dia a dia.

Para o cálculo do valor futuro (montante), é utilizada a seguinte equação.

$$F_n = P(1+i)^n$$

Quando conhecemos o valor do montante, a taxa e o tempo de aplicação, é possível encontrar o valor da aplicação, por meio da equação do valor presente.

$$P = \frac{F_n}{(1+i)^n}$$

A taxa em juros compostos é encontrada pela equação abaixo:

$$i = \sqrt[n]{\frac{F_n}{P}} - 1$$

O cálculo do tempo de aplicação é dado pela fórmula, em que ln é um logaritmo natural, o qual pode ser calculado com auxílio de uma calculadora financeira ou científica.

$$n = \frac{\ln\left(\frac{F_n}{P}\right)}{\ln(1+i)}$$

Atividades de aprendizagem

7. Uma aplicação de $ 22.000 efetuada em certa data produz, à taxa composta de juros de 3,4% ao mês, um montante de $ 30.734,64 em certa data futura. Calcule o prazo de operação.

8. Determine o número de meses necessários para se fazer capital inicial de R$ 200,00 triplicar de valor, com uma taxa de 1% ao mês, no regime de juros compostos.

Caro(a) estudante,

Chegamos ao final da terceira aula de Matemática Financeira. Nesta aula, você estudou sobre o conteudo de juros compostos, o comportamento gráfico do montante em cada um dos regimes de capitalização (simples e composto), bem como conheceu as equações para o cálculo do valor presente, valor futuro, do tempo e da taxa.

Na próxima aula, detalharemos as diferentes modalidade de taxas de juros. Não fique com dúvidas. Volte sempre ao que já foi exposto e leia com calma até conseguir entender o que já foi apresentado até aqui.

Até a nossa próxima aula!

Aula 4. Taxas

Objetivos:

- reconhecer os diferentes tipos de taxas de juros;
- calcular as taxas de juros equivalentes e efetivas; e
- diferenciar os diferentes tipos de taxa para cada aplicação.

Prezado (a) estudante,

Esta é a quarta aula da disciplina de Matemática Financeira. Nesta aula, você estudará diferentes tipos de taxas de juros e suas aplicações.

É muito importante que você compreenda bem este assunto, pois seu entendimento possibilitará sua aplicação nos demais assuntos da disciplina de Matemática Financeira, bem como na sua vida pessoal e profissional.

Boa aula!

4.1 Taxas de juros proporcionais e equivalentes

Taxas proporcionais: duas taxas são proporcionais quando seus valores formam uma proporção com tempos a elas referidos, reduzidos à mesma unidade.

Taxas equivalentes: duas taxas são equivalentes quando, aplicadas a um mesmo capital, durante o mesmo tempo, produzem o mesmo juro.

Segundo Samanez (2010), toda taxa de juros se encontra em determinado prazo, podendo, entretanto, ser convertida para outro prazo qualquer sem alterar seu valor intrínseco, o que viabiliza o cálculo dos juros em operações e facilita comparações entre taxas de juros.

A conversão das taxas de juros para diferentes unidades de tempo, como, por exemplo, transformar a taxa anual em mensal, exige um cuidado especial, principalmente nas operações financeiras no regime de juros compostos.

Mas, porque este assunto é tão importante?

No desenvolvimento desta aula, você perceberá que transformação da taxa, como aprendemos, em juros simples não pode ser aplicada em juros compostos, pois geraria valores diferentes.

Vamos analisar a transformação da taxa anual de i = 12% para mensal.

Em juros simples realizamos o seguinte cálculo:

$$i = \frac{12\%}{12} = 1\% \text{ ao mês}$$

Vejamos os resultados da aplicação das taxas anual e mensal acima a um capital de R$ 200,00 pelo prazo de 12 meses (1 ano).

Taxa de juros mensal	Taxa de juros anuais
P = 200 n = 12 meses $i = 1\% \text{ ao mês} = \frac{1}{100} = 0{,}01 \text{ ao mês}$ $F_n = P(1 + i \times n)$ $F_n = 200(1 + 0{,}01 \times 12)$ $F_n = 200(1 + 0{,}12)$ $F_n = 200 \times 1{,}12$ $F_n = 224$	P = 200 n = 1 ano $i = 12\% \text{ ao mês} = \frac{12}{100} = 0{,}12 \text{ ao mês}$ $F_n = P(1 + i \times n)$ $F_n = 200(1 + 0{,}12 \times 1)$ $F_n = 200(1 + 0{,}12)$ $F_n = 200 \times 1{,}12$ $F_n = 224$

Você percebeu que em ambos os casos, ou seja, tanto a taxa mensal de 1%, como a taxa anual de 12% produziram o mesmo valor futuro F_n?

Neste caso, portanto, as taxas de 1% ao mês e 12% ao ano são proporcionais e equivalentes.

- Proporcionais por que a taxa de 12% ao ano é transformada em mensal por meio da divisão por 12 meses, conforme se observa na equação $i = \frac{12\%}{12} = 1\%$ *ao mês*

- Equivalentes porque ambas as taxas quando aplicadas ao mesmo capital (200 reais) pelo mesmo tempo (1 ano) geraram o mesmo valor futuro, ou seja 224 reais.

Vamos agora ver o que ocorre em juros compostos, a partir do mesmo valor presente e tempo que o exemplo anterior.

Taxa de juros mensal	Taxa de juros anuais
P = 200 n = 12 meses $i = 1\%\ ao\ mês = \frac{1}{100} = 0{,}01\ ao\ mês$ $F_n = P(1+i)^n$ $F_n = 200(1+0{,}01)^{12}$ $F_n = 200(1{,}01)^{12}$ $F_n = 200 \times 1{,}126825$ $F_n = 225{,}36$	P = 200 n = 1 ano $i = 12\%\ ao\ mês = \frac{12}{100} = 0{,}12\ ao\ mês$ $F_n = P(1+i)^n$ $F_n = 200(1+0{,}12)^1$ $F_n = 200(1{,}12)^1$ $F_n = 200 \times 1{,}12$ $F_n = 224$

Em juros compostos, o resultado de duas taxas proporcionais não gera montantes equivalentes, como mostra o quadro acima, onde o valor presente de R$ 200, aplicado pelo período de 1 ano, quando se utiliza a taxa anual de 12% produz o montante de R$ 224 e quando considera a taxa mensal 1% passa a produzir o montante de R$ 225,36. Ora, mas por que isso? Por uma razão muito simples. Porque em juros compostos, a cada período de vencimento, os juros são incorporados ao capital e assim também sofre a incidência de juros.

A taxa proporcional não é um tipo de taxa de juros, é apenas uma característica do regime de juros simples. A taxa nominal pode ser proporcionalizada de modo que seja expressa em diferentes períodos. Entretanto, basicamente, o conceito de taxa proporcional somente é utilizado no regime de juros simples, no sentido de que o valor dos juros é proporcional apenas ao tempo.

Agora que você já percebeu a diferença, vamos mostrar como se calcula a equivalência de taxas em juros compostos.

Assim, considerando-se o ano comercial (360 dias) e mês comercial (30 dias), é possível determinar a identidade de equivalência de algumas taxas efetivas, como:

(1+ taxa anual)= (1+taxa mensal) ^{12}

Ou ainda,

(1+ taxa anual)= (1+taxa diária) ^{360}

Isso significa dizer que existe uma igualdade entre (1+ taxa anual) e (1 + taxa mensal)^{12}.

A figura a seguir ilustra esta equivalência, ao comparar a taxa anual à taxa mensal.

Ao longo deste caderno, usaremos a seguinte convenção para as taxas de juros efetivas:
i_a = taxa efetiva anual;
i_s = taxa efetiva semestral;
i_t = taxa efetiva trimestral;
i_b = taxa efetiva bimestral;
i_m = taxa efetiva mensal;
i_d = taxa efetiva diária.

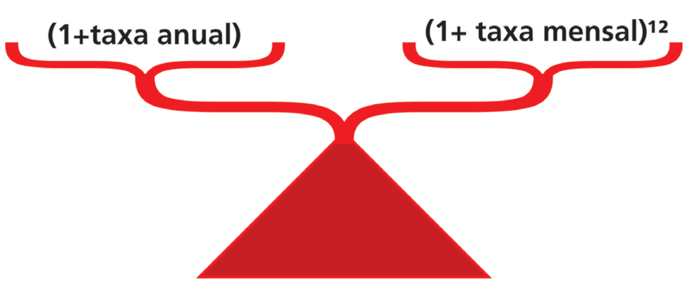


Figura 4 - Taxas equivalentes de uma período maior a partir de um período menor
Fonte: autor

Conhecemos a taxa	Queremos calcular a taxa	Equação
Mensal	Anual	$i_a=(1+i_m)^{12}-1$
	Semestral	$i_s=(1+i_m)^{6}-1$
	Quadrimestral	$i_q=(1+i_m)^{4}-1$
	Trimestral	$i_t=(1+i_m)^{3}-1$
	Bimestral	$i_b=(1+i_m)^{2}-1$
Bimestral	Anual	$i_a=(1+i_b)^{6}-1$
	Semestral	$i_s=(1+i_b)^{3}-1$
	Quadrimestral	$i_q=(1+i_b)^{2}-1$
Trimestral	Anual	$i_a=(1+i_t)^{4}-1$
	Semestral	$i_s=(1+i_t)^{2}-1$
Semestral	Anual	$i_a=(1+i_s)^{2}-1$

Quando passamos de uma unidade de tempo menor para uma maior, como de mês para ano, devemos elevar a taxa de juros pelo número de períodos correspondente.

No sentido contrário, por exemplo, de ano para mês, devemos elevar ao inverso do período, ou seja, aplicar uma raiz $\sqrt[n]{1+i}$ (enésima de 1 + i), em que n é igual o número de períodos correspondentes.

Veja a seguir as conversões necessárias:

Conhecemos a taxa	Queremos calcular a taxa	Equação
Mensal	Diária	$i_d = \sqrt[30]{1+i_m} - 1$
Trimestral	Mensal	$i_m = \sqrt[3]{1+i_t} - 1$
Semestral	Mensal	$i_m = \sqrt[6]{1+i_s} - 1$
	Bimestral	$i_b = \sqrt[3]{1+i_s} - 1$
	Trimestral	$i_t = \sqrt[2]{1+i_s} - 1$
Anual	Diária	$i_d = \sqrt[360]{1+i_a} - 1$
	Mensal	$i_m = \sqrt[12]{1+i_a} - 1$
	Bimestral	$i_b = \sqrt[6]{1+i_a} - 1$
	Trimestral	$i_t = \sqrt[4]{1+i_a} - 1$
	Semestral	$i_s = \sqrt[30]{1+i_m} - 1$

4.2 Taxa de juros nominais

As taxas de juros nominais são outra maneira de explicarmos como ocorre a evolução de uma dívida. São aplicáveis quando queremos trabalhar com um período de tempo diferente do especificado pela taxa de juros – e quando os juros são capitalizados mais de uma vez no período a que a taxa se refere.

Por exemplo, quando falamos de uma vez no período a que a taxa se refere.

De acordo com Wakamatsu (2012), o cálculo das taxas nominais tem como base unicamente as pontas do processo, o valor presente e o valor futuro.

Entretanto, também é utilizado pelas instituições como uma simplificação de taxa. Como, por exemplo, em financiamento da casa própria a uma taxa de juros de 6% ao ano. Porém, o recálculo da dívida é feito mensalmente para a geração de prestação, logo a capitalização é mensal. Neste caso, é uma taxa nominal, pois divergem o tempo em que expressa e o de sua capitalização.

Um aspecto muito importante no que se refere a este assunto é de que, toda vez que você lê em um contrato de empréstimo, a denominação "taxa nominal ano capitalizada mensalmente", para utilizá-la para fins de cálculo deve necessariamente transformá-la para o período de capitalização por meio da divisão proporcional (divisão simples).

Vamos demonstrar numericamente para facilitar a sua compreensão.

Tomemos como exemplo uma taxa de juros de 6% ao ano, com capitalização mensal. Observe que a taxa está ao ano, porém a sua capitalização é mensal. O que isso significa?

Significa que a cada mês haverá o cálculo de juros e incorporação ao capital.

Mas como transformá-la? Vejamos:

Taxa nominal	i = 6% ao ano (capitalizada mensalmente)
Taxa mensal	$i = \frac{6\%}{12} = 0{,}5\% \text{ ao mês}$

Mas, sempre devo transformá-la em mensal? Não, nem sempre, como é possível observar no caso seguinte.

Imagine que uma aplicação no Tesouro da União remunere à taxa de juros de 8% ao ano, capitalizada semestralmente. Como resolvo?

Neste caso, observe que a taxa nominal está ao ano, porém a capitalização é semestral e, assim, devo transformá-la em semestral, dividindo-a por 2.

Taxa nominal	i = 8% ao ano (capitalizada mensalmente)
Taxa mensal	$i = \frac{8\%}{2} = 4\%\ ao\ semestre$

4.3 Taxa de juros proporcional e taxa efetiva

Como vimos no tópico anterior, a taxa nominal é uma taxa declarada ou taxa cotada que não incorpora capitalizações, sendo necessário calcular a taxa efetiva equivalente quando pretendemos efetuar cálculos e comparações no regime de juros compostos conforme Samanez (2010).

Quando uma taxa de juros é nominal, admite-se que o prazo de capitalização dos juros (ou seja, período de formação e incorporação dos juros ao principal) não é o mesmo daquele definido para a taxa de juros.

Tomando como base o exemplo anterior verifica-se que os prazos de capitalização não são coincidentes. O prazo de capitalização é de um mês e o prazo que se refere à taxa de juros é de um ano (12 meses). Assim, 6% representam uma taxa nominal expressa para um período inteiro (ano) que deve ser proporcionalizada ao período de capitalização (mês). No exemplo, a taxa proporcional por período de capitalização é de $\frac{6\%}{12} = 0,5\%$ ao mês.

Ao se capitalizar essa taxa nominal, apura-se uma taxa anual efetiva de juros superior àquela declarada para a operação. Vejamos:

Taxa nominal anual	6% ao ano, capitalizada mensamente
Taxa proporcional ou efetiva por período de capitalização	$i = \frac{6\%}{12\ meses} = 0,5\%\ ao\ mês = \frac{0,5}{100} = 0,005$
Taxa efetiva anual	$i_a = (1+i_m)^{12} - 1$ $i_a = (1+0,005)^{12} - 1$ $i_a = (1,005)^{12} - 1$ $i_a = 1,061678 - 1$ $i_a = 0,061678$ A taxa unitária efetiva anual, neste caso é de 0,061678, para transformá-la em porcentual basta que a multipliquemos por 100. $i = 6,1678\%\ ao\ ano$

É chamado de capitalização o ato de calcular os juros sobre um capital e incorporá-lo ao recurso aplicado, formando-se assim o montante que será tomado como novo capital base para fins de apuração de juros nos períodos subsequentes.

Resumo

Você estudou que taxas são denominadas **proporcionais** quando duas taxas são proporcionais e seus valores formam uma proporção com tempos a elas referidos, reduzidos à mesma unidade. E de **equivalentes** as que quando, aplicadas a um mesmo capital, durante o mesmo tempo, produzem o mesmo juro.

A conversão das taxas de juros para diferentes unidades de tempo, como, por exemplo, transformar a taxa anual em mensal, exige um cuidado especial, principalmente nas operações financeiras no regime de juros compostos.

Outro aspecto estudado é que, diferentemente do que ocorre que juros simples, em juros compostos o resultado de duas taxas proporcionais não geram montantes equivalentes. E que as taxa equivalentes em juros compostos são calculadas com base nas equações de conversão sintetizadas no quadro a seguir.

Conhecemos a taxa	Queremos calcular a taxa	Equação
Mensal	Anual	$i_a = (1+i_m)^{12} - 1$
	Semestral	$i_s = (1+i_m)^6 - 1$
	Quadrimestral	$i_q = (1+i_m)^4 - 1$
	Trimestral	$i_t = (1+i_m)^3 - 1$
	Bimestral	$i_b = (1+i_m)^2 - 1$
Bimestral	Anual	$i_a = (1+i_b)^6 - 1$
	Semestral	$i_s = (1+i_b)^3 - 1$
	Quadrimestral	$i_q = (1+i_b)^2 - 1$
Trimestral	Anual	$i_a = (1+i_t)^4 - 1$
	Semestral	$i_s = (1+i_t)^2 - 1$

Semestral	Anual	$i_a = (1+i_s)^2 - 1$
Mensal	Diária	$i_d = \sqrt[30]{1+i_m} - 1$
Trimestral	Mensal	$i_m = \sqrt[3]{1+i_t} - 1$
Semestral	Mensal	$i_m = \sqrt[6]{1+i_s} - 1$
	Bimestral	$i_b = \sqrt[3]{1+i_s} - 1$
	Trimestral	$i_t = \sqrt[2]{1+i_s} - 1$
Anual	Diária	$i_d = \sqrt[360]{1+i_a} - 1$
	Mensal	$i_m = \sqrt[12]{1+i_a} - 1$
	Bimestral	$i_b = \sqrt[6]{1+i_a} - 1$
	Trimestral	$i_t = \sqrt[4]{1+i_a} - 1$
	Semestral	$i_s = \sqrt{1+i_a} - 1$

Quando uma taxa de juros é nominal, admite-se que o prazo de capitalização dos juros (ou seja, período de formação e incorporação dos juros ao principal) não é o mesmo daquele definido para a taxa de juros.

Atividades de aprendizagem

1. Qual é a taxa de juros mensal equivalente a 30% ao ano?

2. Qual é a taxa anual equivalente a 2% ao mês?

3. Uma taxa nominal de 18% ao ano é capitalizada mensalmente. Calcule a taxa efetiva anual.

4. Um banco emprestou a importância de $ 35.000 por dois anos. Sabendo que o banco cobra a taxa de 36% ao ano, com capitalização trimestral, qual a taxa efetiva e qual o montante a ser desenvolvido ao final de dois anos.

Prezado(a) estudante,

Chegamos ao final da quarta aula sobre Matemática Financeira. Nesta aula, o tema foi taxas de juros proprcionais, equivalentes, nominais e efetivas.

Acreditamos que esta aula trouxe uma oportunidade para você conhecer as principais transformações da taxa de juros aplicáveis em nossa disciplina.

Na próxima aula, abordaremos as operações de descontos. Até lá!

Aula 5. Descontos

Objetivos:

- reconhecer a diferença entre descontos e ações de marketing;
- calcular e exemplificar operações de descontos; e
- identificar as modalidades de descontos.

Prezado(a) estudante,

Esta é a quinta aula da disciplina de Matemática Financeira e nela discutiremos sobre os descontos simples e compostos.

A palavra desconto com certeza não é novidade para você. Entretanto, usualmente utilizamos a palavra desconto de uma forma um tanto quanto equivocada, uma vez que é muito comum chamarmos de descontos as promoções ou liquidações como os da figura abaixo, nas quais as lojas comercializam os seus produtos abaixo do preço da etiqueta.

Fonte: ilustradora

Na área de conhecimento em finanças, a palavra desconto é nome dado a um abatimento que se faz, quando um título de crédito é resgatado antes do vencimento e, de maneira análoga, ocorre quando se paga uma dívida antes do vencimento.

Observe que, neste caso, há uma relação de tempo envolvida, ao contrário do que ocorre nas campanhas promocionais das lojas em que a redução é realizada sobre o valor à vista, e portanto, o abatimento ocorre sem a relação de tempo.

5.1. Aplicações de descontos

Segundo Samanez, desconto:

> é a denominação dada a um abatimento que se faz quando um título de crédito é resgatado antes de seu vencimento. É uma operação tradicional no mercado financeiro e no setor comercial, em que o portador de títulos de crédito, tais como letras de câmbio, notas promissórias etc., podem levantar fundos em um banco, descontando o título antes da data do vencimento.(2010, p.68)

Entretanto, ao descontar antes do prazo de vencimento, segundo este mesmo autor, “o banco, naturalmente, libera uma quantia menor que o valor inscrito no título”. Mas a que se atribui essa diferença?

Esta diferença é denominada de desconto, a qual Crespo (2002, p. 99) classifica como “a quantia a ser abatida do valor nominal, isto é, a diferença entre o valor nominal e o valor atual” ou seja valor descontado.

Assim, podemos definir que o **valor descontado**, ou seja, o valor atual na data do desconto é calculado pela diferença entre o valor nominal e o desconto, conforme mostra a equação a seguir:

Valor Descontado = Valor Nominal - Desconto

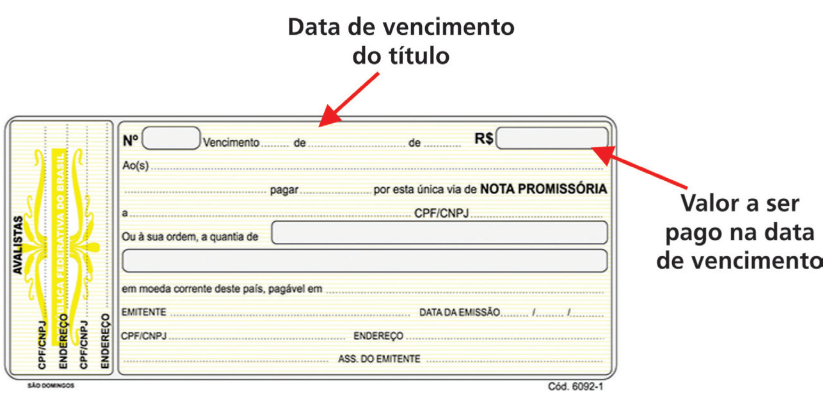
Da mesma forma que a capitalização pode ser realizada nos regimes de juros simples ou compostos, também ocorre com o uso do desconto que pode ser simples ou composto. O desconto simples é amplamente utilizado nas operações de curto prazo, ao passo que desconto composto é utilizado apenas em operações de longo prazo. Além disso, os descontos (sejam eles simples ou compostos) se dividem ainda em duas outras categorias: desconto "por dentro" (racional); e desconto "por fora" (bancário, ou comercial).

A operação de desconto é muito útil quando se faz o resgate antecipado de um título de aplicação ou quando se deseja realizar o pagamento de uma dívida antes de seu vencimento.

Mas que títulos são estes?

Existem diversos tipos de títulos, porém os mais conhecidos e utilizados em operações financeiras são a nota promissória, a duplicata e a letra de câmbio. Crespo (2002, p. 98), explica como são e a utilidade de cada um desses títulos, conforme aqui veremos:

a) A **nota promissória** é um comprovante da aplicação de um capital com vencimento predeterminado. É um título muito usado entre pessoas físicas (pessoas), podendo ser utilizado entre uma pessoa física e uma pessoa jurídica (empresa), na qual uma pessoa física se compromete a pagar uma dívida em data futura.



Fonte: http://www.atacadaojandaia.com.br/novo/produtos/1473382.jpg

b) A **duplicata** é um título emitido por uma pessoa jurídica contra seu cliente (pessoa física ou jurídica), para o qual ela vendeu mercadorias a prazo ou prestou serviços a serem pagos no futuro, segundo um contrato.

c) A **letra de câmbio**, semelhante à nota promissória, é um comprovante de uma aplicação de capital com vencimento predeterminado; porém, é um título ao portador, emitido exclusivamente por uma instituição financeira.

5.2 Desconto simples racional

O desconto racional, também conhecido como desconto "por dentro", incorpora os conceitos e relações básicas de juros simples, conforme desenvolvido na aula 2.

Podemos assim denominar, Dr o valor do desconto racional, P o valor presente (valor atual), i a taxa de juros e n o prazo do desconto (número de períodos em que o título é negociado antes de seu vencimento). Tem-se então a conhecida taxa de juros simples:

$$\mathbf{D_r = P \times i \times n}$$

Pela definição de desconto e introduzindo o conceito de valor descontado no lugar de capital no cálculo acima, temos:

$$\mathbf{D_r = N - V_r}$$

sendo N o valor nominal (montante) e V_r o valor descontado racional (valor atual) na data da operação.

Em algumas situações, precisaremos calcular o valor do desconto, porém não teremos o valor descontado. Nestes casos, precisaremos de um outra fórmula. Para construir a fórmula desejada utilizaremos uma analogia com a equação do valor presente em juros simples vista na aula 2, conforme segue.

$$P = \frac{F_n}{1 + in}$$

Na equação acima, substituiremos o valor presente (P), pelo valor descontado racional (V_r) e o valor futuro (F_n) pelo valor nominal (N), teremos.

$$\frac{}{+ i \times n}$$

Mas, também poderei calcular o valor descontado pela equação abaixo. Mas, qual devo utilizar? A resposta é fácil: é necessário que você tenha apenas uma variável desconhecida na equação, pois do contrário é matemática impossível encontrar a resposta.

$$\mathbf{V_r = N - D_r}$$

Existe ainda mais uma opção de encontrar o valor do desconto racional, na qual tomaremos as equações $D_r = N - V_r$ e $V_r = \frac{N}{1+i\times n}$ para explicá-la.

Partindo do raciocínio de que $D_r = N - V_r$ e $V_r = \frac{N}{1+i\times n}$ podemos fazer as seguintes substituições:

tomando a equação

$$\mathbf{D_r = N - V_r}$$

substituiremos V_r pelo segundo termo da igualdade abaixo.

$$\boldsymbol{V = \frac{}{1+i\times n}}$$

Daí teremos

$$D_r = N - \frac{N}{1+in}$$

Aplicando o mínimo múltiplo comum na equação acima, teremos,

$$D_r = \frac{N(1+in)-N}{1+in} = \frac{N+Nin-N}{1+in}$$

Finalmente, encontramos a equação do desconto racional Dr, conforme abaixo.

$$\boldsymbol{D_r = \frac{N\times i\times n}{1+i\times n}}$$

Com esta fórmula é possível calcular o valor do desconto racional obtido de determinado valor nominal (N), a uma dada taxa simples de juros (i) e a determinado prazo de antecipação (n).

Como pode ser observado, o desconto racional representa exatamente as relações de juros simples descritas na aula 2. É importante ressaltar que o juro incide sobre o capital (valor atual), ou seja, sobre o capital liberado da operação. A taxa de juro (desconto) cobrada representa, dessa maneira, o custo efetivo de todo o período do desconto.

Para facilitar o seu aprendizado, mostraremos alguns problemas resolvidos.

1. Um título de R$ 6.000 vai ser descontado dois meses antes de seu vencimento à taxa de 2,1% ao mês. Determine o valor descontado.

Descrição de variáveis:

Valor nominal: N = 6000

Períodos de antecipação: n = 2 meses

Taxa de desconto: i = 2,1% ao mês = $\frac{2,1}{100} = 0,021$

Valor descontado: V_r = ?

Resolução:

$$V_r = \frac{N}{1 + i \times n}$$

$$V_r = \frac{6000}{1 + 0,021 \times 2} = \frac{6000}{1 + 0,042}$$

$$V_r = \frac{6000}{1,042} = 5758,16$$

O valor descontado, ou seja, o valor atual do resgate é de R$ 5.758,16.

2. Determine o desconto racional de um título de R$ 5.000, disponível dentro de 60 dias, à taxa de 3% ao mês.

Descrição de variáveis:

Valor nominal: N = 5000

Períodos de antecipação: n = 60 dias = 2 meses

Taxa de desconto: i = 3% ao mês = $\frac{3}{100} = 0,03$

Valor do desconto: D_r = ?

Resolução:

$$D_r = \frac{N \times i \times n}{1 + i \times n}$$

$$D_r = \frac{5000 \times 0,03 \times 2}{1 + 0,03 \times 2} = \frac{300}{1 + 0,06}$$

$$D_r = \frac{300}{1,06} = 283,02$$

3. Uma duplicata foi descontada pelo valor de R$ 1851,85, a uma taxa de 2% ao mês, quatro meses antes de seu vencimento. Qual o seu valor nominal?

Descrição de Variáveis:

Valor nominal: N = ?

Períodos de antecipação: n = 4 meses

Taxa de desconto: i = 2% ao mês = $\frac{2}{100} = 0,02$

Valor descontado: V_r = 1851,85

Resolução:

$$Vr = \frac{N}{1 + i \times n}$$

$$1851,85 = \frac{N}{1 + 0,02 \times 4}$$

$$1851,85 = \frac{N}{1 + 0,08}$$

$$1851,85 = \frac{N}{1,08}$$

$$N = 1851,85 \times 1,08 = 2000$$

O valor do título é, portanto, de R$ 2.000,00.

Atividades de aprendizagem

1. Tendo-se um título de valor nominal de $ 5.000 vencível em um ano, que está sendo liquidado três meses antes de seu vencimento com 36% a.a. a taxa nominal de juros corrente, pede-se calcular o desconto racional desta operação.

2. Determine a taxa mensal de desconto racional de um título negociado 60 dias antes de seu vencimento, sendo seu valor de resgate igual a $ 26.000 e valor atual na data do desconto de $ 24.236,10.

3. Sabendo que um título possui valor nominal de $ 17.000, e que foi liquidado três meses antes de seu vencimento a uma taxa de 3,5% ao mês, calcule o valor descontado racional.

5.3 Desconto simples comercial

Esse tipo de desconto, por incidir sobre o valor nominal (valor do resgate, ou montante) do título, proporciona maior volume de encargos financeiros efetivos nas operações. Observe que, ao contrário dos juros "por dentro" (desconto racional), cujos encargos são calculados sobre o valor atual, na modalidade "por fora" segundo definição de Samanez (2010, p. 70), "também chamada de *desconto por fora*, o valor do desconto é obtido multiplicando-se o valor nominal do título pela taxa de desconto fornecida pelo banco e pelo prazo a decorrer até o vencimento do título".

A notação matemática dessa modalidade de desconto é dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{D_F = N \times d \times n}$$

sendo N é o valor nominal, o d a taxa de desconto comercial e n é o prazo de antecipação.

Aplicando a definição acima, é possível obter a expressão do valor descontado:

$$\mathbf{V_F = N - D_F}$$

$$V_F = N - N \times d \times n$$

$$\mathbf{V_F = N (1 - d \times n)}$$

De outro modo, o valor nominal de um título pode ser obtido da seguinte forma:

$$N = \frac{V_F}{(1 - d \times n)}$$

As questões que abaixo mostraremos são as mesmas resolvidas pelo desconto racional que agora resolveremos pelo desconto comercial.

1. Um título de R$ 6.000 vai ser descontado dois meses antes de seu vencimento à taxa de 2,1% ao mês. Determine o valor descontado.

Descrição de variáveis:

Valor nominal: N = 6000

Períodos de antecipação: n = 2 meses

Taxa de desconto: d = 2,1% ao mês = $\frac{2,1}{100} = 0,021$

Valor descontado: V_F= ?

Resolução:

$$V_F = N(1 - d \times n)$$
$$V_F = 6000(1 - 0,021 \times 2)$$
$$V_F = 6000(1 - 0,042)$$
$$V_F = 6000 \times 0,958 = 5748$$

O valor descontado, ou seja, o valor atual do resgate é de R$ 5.748,00.

2. Determine o desconto racional de um título de R$ 5.000, disponível dentro de 60 dias, à taxa de 3% ao mês.

Descrição de variáveis:

Valor nominal: N = 5000

Períodos de antecipação: n = 60 dias = 2 meses

Taxa de desconto: d = 3% ao mês = $\frac{3}{100} = 0,03$

Valor do desconto: D_F= ?

Resolução:

D_F= N × d × n

D_F=5000 × 0,03 × 2=300

3. Uma duplicata foi descontada pelo valor de R$ 1851,85, a uma taxa de 2% ao mês, quatro meses antes de seu vencimento. Qual o seu valor nominal?

Descrição de variáveis:

Valor nominal: N = ?

Períodos de antecipação: n = 4 meses

Taxa de desconto: d = 2% ao mês = $\frac{2}{100} = 0,02$

Valor descontado: V_F = 1851,85

Resolução:

$$N = \frac{V_r}{(1 - d \times n)}$$

$$N = \frac{1851,85}{(1 - 0,02 \times 4)}$$

$$= \frac{1851,85}{(1 - 0,08)} = \frac{1851,85}{0,92}$$

$$N = 2012,88$$

O valor do título é, portanto, de R$ 2012,88.

Atividades de aprendizagem

4.Tendo-se um título de valor nominal de \$ 5.000 vencível em um ano, que está sendo liquidado três meses antes de seu vencimento,sendo de 1% ao mês, pede-se calcular o desconto comercial.

5. Determine a taxa mensal de desconto "por fora" de um título negociado 60 dias antes de seu vencimento, sendo seu valor de resgate igual a \$ 35.000 e valor atual na data do desconto de \$ 33.200.

6. Sabendo que um título possui valor nominal de \$ 17.000 e que foi liquidado três meses antes de seu vencimento a uma taxa de 3,5% ao mês, calcule o valor descontado comercial.

5.4 Taxa implícita de juros no desconto simples comercial

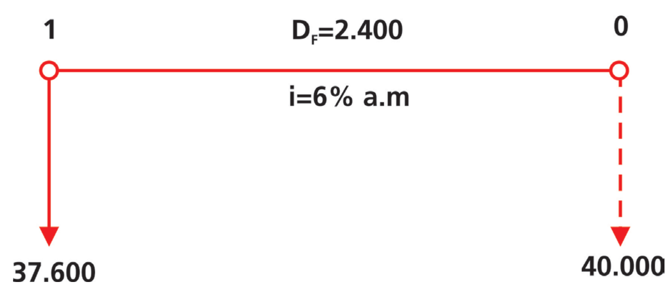
Conforme demonstrado nos tópicos anteriores, o desconto "por fora", ao ser apurado sobre o valor nominal (resgate) do título, admite implicitamente uma taxa de juros superior àquela declarada para a operação.

Para melhor compreensão, utilizaremos alguns exemplos para demonstrar a taxa implícita de juros (ou taxa real) em uma operação de desconto "por fora".

Exemplo:

Suponhamos que uma duplicada de valor nominal de $ 40.000 tenha sido descontada em um banco um mês antes de seu vencimento à taxa de 6% ao mês.

Aplicando-se o critério de desconto comercial, comum neste tipo de operações, tem-se:



Se o resgate está sendo realizado um mês antes de seu vencimento, significa que pagarei juros durante este período de antecipação. Se o valor que efetivamente resgatei foi de R$ 37.600, então o justo é que os juros cobrados fossem sobre este valor, ou seja, ao final de um mês, o montante (valor presente somado aos juros) seria de R$ 40.000.

Para saber se isso ocorre ou não aplicaremos a equação do valor futuro em juros simples, conforme segue.

$F_n = P\,(1 + i \times n)$

$F_n = 37600(1+0,06 \times 1)$

$F_n = 39.856$

Entretanto se aplicarmos o V_f= 37.600, à taxa de juros adotada (6% ao mês) pelo período de 1 mês, não teremos o valor futuro de R$ 40.000, conforme vimos.

Mas, o que isso significa?

Significa dizer que, nas operações de desconto comercial, existe uma taxa implícita de juros na operação, superior à declarada na operação, para que assim produza os juros equivalentes ao desconto praticado.

Para descobrir qual foi a taxa em termos racionais, ou seja, a taxa efetivamente aplicada, aplicaremos a equação,

$$i = \frac{D_r}{V_r \times n}$$

A equação da taxa implícita é obtida pelo critério de desconto racional, conforme aqui mostraremos. Partiremos da equação $D_r = V_r \times i \times n$ e isolaremos V_r x n.

$$D_r = V_r \times i \times n$$

$$i = \frac{D_r}{V_r \times n}$$

Agora que já temos a equação da taxa de juros implícita na operação de descontos comercial, calcularemos qual foi a taxa de juros efetivamente pela antecipação do resgate do título.

$$i = \frac{D_r}{V_r \times n}$$

$$i = \frac{2.400}{37.600 \times 1}$$

$$i = \frac{2.400}{37.600} = 6,383\%\ a.m.$$

Isso significa que, apesar de a taxa declarada no desconto comercial ter sido de 6% ao mês, quando calculamos a taxa implícita, descobrimos que, na verdade, a taxa realmente paga foi de 6,383% ao mês.

Mas, por que ocorreu esta diferença?

Por uma razão muito simples. Isso ocorre porque no desconto racional o valor do desconto é calculado sobre o valor atual, enquanto no desconto comercial o mesmo cálculo se dá sobre o valor do título (valor nominal ou valor futuro) e não sobre o valor atual.

Um título de $ 6.000 vai ser descontado à taxa de 2% ao mês, um mês antes do vencimento do título. Sabendo que o valor descontado comercial foi de R$ 5880 e o desconto de R$ 120, determine a taxa de juro implícita.

$$i = \frac{D_r}{V_r \times n}$$

$$i = \frac{120}{5880 \times 1} = 0,0204$$

Para obter a taxa em termos percentuais, basta multiplicarmos o resultado acima por 100, o que nos retornará a taxa de 2,04% ao mês.

$$i = 0,0204 \times 100 = 2,04\%$$

Atividade de aprendizagem

7. Tendo-se um título de valor nominal de $ 8.000 vencível em um ano, que está sendo liquidado um mês antes de seu vencimento, com 3% ao mês, pede-se calcular o desconto e o valor descontado comercial desta operação. E, em seguida, descubra a taxa de juros implícita da operação.

5.5 Desconto composto

O desconto composto, utilizado em operações de longo prazo, pode ser identificado como desconto "por dentro", ou racional, e desconto "por fora", similarmente ao desconto simples. Entretanto, o desconto composto "por fora" é raramente empregado no Brasil, não apresentando, portanto, uso prático em nosso estudo.

Já o desconto composto "por dentro", no qual se concentrará o nosso estudo, envolve valor atual e valor nominal de um título capitalizado segundo o regime de juros compostos, apresentando ampla aplicação prática.

O desconto composto "por dentro", ou racional, é aquele estabelecido segundo as condições do regime de juros compostos. Assim sendo, o valor descontado racional (V_r) equivale ao valor presente de juros compostos, conforme visto na aula 3. Vejamos a expressão que demonstra o valor descontado racional:

$$V_r = \frac{N}{(1+i)^n}$$

Por outro lado, sabe-se que o desconto é obtido pela diferença entre o valor nominal (resgate) e o valor descontado (valor presente). Isso nos leva à conclusão de que o desconto racional (Dr) tem a seguinte expressão:

$D_r = N - V_r$

fazendo a substituição do valor atual (V_r) por

$$\frac{N}{(1+i)^n}$$

$$D_r = N - \frac{N}{(1+i)^n}$$

Vamos aplicar o que acabamos de ver em alguns exemplos, para que você possa melhor compreender:

1. Uma nota promissória, cujo valor nominal é de R$ 4.000, será resgatada seis meses antes do vencimento, à taxa de 2% ao mês. Qual será o valor liquido liberado nesta operação, sabendo-se que será utilizado o regime de desconto composto "por dentro"?

Descrição de variáveis:

Valor nominal: N = 4000

Períodos de antecipação: n = 6 meses

Taxa de desconto: i = 2% ao mês = $\frac{2}{100} = 0,02$

Valor descontado: V_r = ?

Resolução:

$$V_r = \frac{N}{(1+i)^n}$$

$$V_r = \frac{4000}{(1+0,02)^6} = \frac{4000}{(1,02)^6}$$

$$V_r = \frac{4000}{1,12616} = 3.551,88$$

O valor atual a ser resgatado, portanto, é de R$ 3.551,88.

2. Um título no valor nominal de R$ 6.500, com vencimento para o dia 10/set foi descontado no dia 06/lul do mesmo ano. Qual foi o valor do desconto, se a taxa contratada foi de 0,2% ao dia? *Dica: utilize a tabela de contagem de dias disponível na aula dois para determinar o número de dias de antecipação.*

Descrição de variáveis:

Valor nominal: N = 6500

Períodos de antecipação:

Data de vencimento	10/09 = 253
Data da antecipação	06/07 = 157
N	96

Taxa de desconto: i = 0,2% ao dia = $\frac{0,2}{100} = 0,002$

Desconto: D_r = ?

Resolução:

$$D_r = N - \frac{N}{(1+i)^n}$$

$$D_r = 1200 - \frac{6500}{(1+0{,}002)^{96}}$$

$$D_r = 6500 - \frac{6500}{(1{,}002)^{96}}$$

$$D_r = 6500 - \frac{6500}{1{,}211438} = 6500 - 5365{,}52$$

$$D_r = 6500 - 5365{,}52 = 1134{,}48$$

Você chegou ao final de mais uma aula. Vamos revisar o conteúdo visto?

Resumo

Vimos, nesta aula, que, na área de finanças, a palavra desconto é o nome dado a um abatimento que se faz, quando um título de crédito é resgatado antes do vencimento e, de maneira análoga, ocorre quando se paga uma dívida antes do vencimento.

Para o cálculo do desconto, três variáveis são necessárias: o valor nominal (valor na data do vencimento); valor atual, também conhecido como valor descontado, que representa o valor do resgate antes de seu vencimento; e o desconto.

Da mesma forma que a capitalização pode ser realizada nos regimes de juros simples ou compostos, também ocorre com o uso do desconto que pode ser simples ou composto, sendo o desconto simples amplamente utilizado nas operações de curto prazo.

Os descontos podem ser classificados quanto a sua forma de cálculo, podendo ser racionais quando o valor do desconto é calculado tendo por base o valor atual (efetivamente resgatado); ou comerciais, também denominados de desconto bancário. Este último é amplamente utilizado pelas instituições financeiras no Brasil e quanto a sua forma de cálculo, baseia-se no valor nominal para calcular os descontos.

A operação de desconto é muito útil quando é necessário o resgate antecipado de um título de aplicação ou quando se deseja realizar o pagamento de uma dívida antes de seu vencimento. Mostramos que, entre os principais títulos utilizados na área financeira, temos a nota promissória, a duplicata e as letras de câmbio.

Quanto aos descontos compostos, que são utilizados em operações de longo prazo, no Brasil, é largamente utilizado o desconto composto "por dentro".

O desconto composto "por dentro", ou racional, é aquele estabelecido segundo as condições do regime de juros compostos. Assim sendo, o valor descontado racional (Vr) equivale ao valor presente de juros compostos, conforme visto na aula 3.

Atividades de aprendizagem

8. Calcule o valor atual de um título de $ 40.000, resgatado um ano e quatro meses antes do seu vencimento, sendo a taxa de desconto de 2% ao mês.

9. Um título pago cinco meses antes de seu vencimento, com um desconto composto de 4% ao mês, ficou reduzido a $ 24.658. Calcule o valor do título.

Prezado(a) estudante,

Você finalizou a quinta aula e chegamos à metade desta disciplina. Mas, ainda faltam informações valiosas que serão importantes para sua formação profissional como técnico em finanças. Na próxima aula, abordaremos séries uniformes ou anuidades. Preparado(a) para prosseguir?

Aula 6. Séries de pagamentos

Objetivos:

- reconhecer séries de pagamentos postecipados e diferidos;
- identificar como é calculado o valor das prestações, do principal e do montante de séries uniformes; e
- demonstrar como fazer a programação financeira com base em depósitos mensais, compras futuras, viagens, gastos com educação e aposentadoria

Prezado (a) estudante,

Esta é a nossa sexta aula da disciplina Matemática Financeira e o assunto a ser tratado são as séries de pagamentos, também conhecidas como anuidades. Mas, por que é importante estudar este assunto? Em que podemos aplicá-lo? Para bem responder a estas perguntas, basta lembrarmo-nos das compras que fazemos parceladas, seja no cartão de crédito ou por meio de crédito das lojas.

Esperamos que, nesta aula, você assimile este conteúdo para utilização em sua vida pessoal e profissional. Boa aula!

6.1.Classificação das anuidades

Quanto ao prazo:

As séries de pagamentos podem ser temporárias ou perpétuas. São denominadas de temporárias, quando a duração for limitada e perpétuas, quando a duração for ilimitada.

Vamos a alguns exemplos:

Séries temporárias	Séries perpétuas
• Parcelamento de eletrodomésticos • Financiamento de imóvel ou veículo	• Mensalidade de aluguel • Conta de luz, água e telefone

Observe que as séries perpétuas não têm previsão de término, enquanto as temporárias têm o tempo definido na sua contratação.

Quanto ao valor dos termos:

As séries possuem também uma categorização em relação aos valores dos termos (mensalidades) que podem ser constantes, ou seja, com pagamentos mensais e iguais. Ou podem ser variáveis, ou seja, com mensalidades variáveis. O quadro a seguir traz algumas comparações.

Séries Constantes	Séries Variáveis
• Parcelamento de eletrodomésticos • Financiamento de veículo • Mensalidade de aluguel	• Conta de luz, água e telefone

Observe que, nas séries variáveis, os valores mensais não são constantes, pois dependem do consumo mensal, não é mesmo?

Quanto à forma de pagamento ou de recebimento:

Outra característica das séries são as formas de seu pagamento, as quais podem ser classificadas em antecipadas, postecipadas ou diferidas.

Os pagamentos postecipados podem ser também chamados de vencidos, uma vez que são aqueles pagos no fim dos períodos. Este tipo de pagamento é o mais adotado no Brasil e, por este motivo, nos concentraremos especificamente no estudo deste modelo.

Mas, como reconheço um pagamento postecipado?

É muito fácil. São aqueles em que realizamos a compra, sem entrada, e o primeiro pagamento ocorre somente após 30 dias como, por exemplo, fatura dos cartões de crédito, a conta de energia.

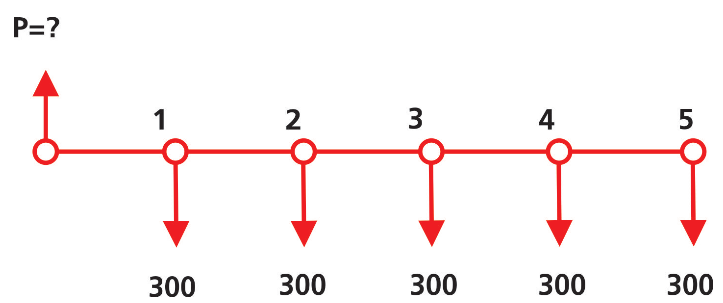
Já as séries antecipadas exigem pagamentos no início dos períodos como, por exemplo, os financiamentos, com a primeira prestação à vista.

Existem ainda as séries diferidas, que são aquelas que oferecem carência para a realização do primeiro pagamento.

6.2 Cálculo do valor presente (P) de uma série a partir do valor da prestação (R)

Agora que você já viu como identificar os diferentes tipos de séries, vamos aprender como calcular o valor presente de uma série de pagamentos: temporária, constante e postecipada. É importante salientar que este modelo é muito utilizado no dia a dia das lojas e bancos.

Para entender melhor, vamos recorrer a um exemplo: você comprou o televisor em cinco parcelas de R$ 300,00, Soube, porém, que a taxa de desconto para pagamento à vista seria de 2% ao mês. Nada mais justo, uma vez que juros embutidos devem ser retirados, tendo em vista que o comprador anteciparia o pagamento de uma dívida que ainda não venceu.



Fonte: autor

Observe que, tanto pelo fluxo de caixa acima como pela tabela a seguir, é fácil perceber que os vencimentos de cada umas das parcelas se dará em diferentes datas. A primeira delas vencerá em um mês, enquanto, a última vencerá em cinco meses. Mas, se quiséssemos pagar toda a dívida hoje mesmo, qual seria o valor a ser pago?

Valor no vencimento	Vencimento	Valor hoje
300	5 meses	271,72
300	4 meses	277,15
300	3 meses	282,70
300	2 meses	288,35
300	1 mês	294,12
1500		1.414,04

Para sabermos qual o valor total a ser pago na data atual, basta que utilizemos o conceito de valor presente no regime de juros compostos, que você aprendeu na aula 2, dado pela seguinte equação:

$$P = \frac{F_n}{(1+i)^n}$$

Mas, que prazo devemos colocar na fórmula, se temos cinco prazos diferentes? Na verdade, você precisará fazer um cálculo separado para cada uma das parcelas, como mostramos no quadro abaixo e, somente depois de calcular o valor presente de todas as parcelas, é que somará os resultados encontrados para obter o valor atual total a ser liquidado.

Parcela	**Valor presente**
1	$P = \frac{300}{(1+0,2)^1} = \frac{300}{1,02} = 294,12$
2	$P = \frac{300}{(1+0,2)^2} = \frac{300}{1,0404} = 288,35$
3	$P = \frac{300}{(1+0,2)^3} = \frac{300}{1,06121} = 282,70$
4	$P = \frac{300}{(1+0,2)^4} = \frac{300}{1,08243} = 277,15$
5	$P = \frac{300}{(1+0,2)^5} = \frac{300}{1,10408} = 271,72$

Agora você já sabe como calcular a antecipação de parcelas daquelas compras, parcelas realizadas pelo crédito próprio das lojas, não é mesmo? Mas, imagine que você tivesse um parcelamento de longo prazo a ser liquidado, como, por exemplo, a compra de um veículo parcelado em 60 meses, e tivesse que calcular o pagamento à vista. Seria um cálculo muito trabalhoso, não é mesmo?

Mas, não se preocupe, pois mostraremos que existe uma forma mais simples de calcular o valor presente de uma série uniforme, conforme mostraremos na próxima página.

O valor presente de uma série de parcelas uniformes e postecipadas (termos vencidos) representa a soma das parcelas atualizadas para a data inicial do fluxo de desconto:

$$P = R \times a_{n\neg i}$$

Onde,

P = principal (valor atual ou valor à vista)

n = número de termos (prestações)

R = termos (prestações)

i = taxa de juros

Diz-se que o principal vai ser pago em “n” parcelas (prestações) iguais a “R”.

$a_{n\neg i}$, lê-se “a, n, cantoneira, i” ou “a, n, i”.

Este é o fator usado para o cálculo do valor de uma prestação. Sua fórmula é dada abaixo.

$$a_{n\neg i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

Para exemplificar, vamos resolver a questão abaixo, utilizando as definições aqui demonstradas.

Dado o anúncio abaixo, calcule o valor à vista da TV.

Fonte: ilustradora

Descrição das variáveis:

P = ?

n = 7

R = 199,86

i= 1,79% ao mês= $\frac{1,79}{100} = 0,0179$

Vamos determinar $a_{n\neg i}$ da questão,

$$a_{n\neg i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

$$a_{n\neg i} = \frac{(1+0,0179)^7 - 1}{0,0179(1+0,0179)^7}$$

$$a_{n\neg i} = \frac{(1,0179)^7 - 1}{0,0179(1,0179)^7}$$

$$a_{n\neg i} = \frac{1,13223 - 1}{0,0179 \times 1,13223}$$

$$a_{n\neg i} = \frac{0,13223}{0,20267} = 6,52456$$

Agora que determinamos o valor de $a_{n\neg i}$ podemos calcular o valor à vista, conforme se segue

P = R × $a_{n\neg i}$

P=199,86 × 6,52456 =1304,00

O valor à vista do televisor é de 1304,00 reais.

Atividades de aprendizagem

1. Determinar o valor do principal de um financiamento realizado com uma taxa efetiva de 1% ao mês, no regime de juros compostos, e que deve ser liquidado em 12 prestações mensais, sucessivas e iguais a $ 1.000.

2. A compra de um televisor é parcelada em 10 prestações de $ 140. Sabendo que a taxa de juros da operação é de 1,5% ao mês, calcule o valor do televisor caso fosse comprado à vista.

6.3 Cálculo das prestações periódicas (R) a partir do valor presente (P)

No tópico anterior, aprendemos a calcular o valor presente de uma série de pagamentos, a partir do valor da prestação, da taxa e do número de parcelas. Há casos, porém em que sabemos o valor à vista, a taxa de juros e o número de parcelas, mas precisamos calcular o valor das parcelas, como mostra a ilustração abaixo.

Vamos calcular o valor das parcelas?

Fonte: ilustradora

Descrição das variáveis:

P = 1315,37

n = 6

R = ?

i= 1,79% ao mês= $\frac{1,79}{100} = 0,0179$

Vamos determinar $a_{n\neg i}$ da questão,

$$a_{n\neg i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

$$a_{n\neg i} = \frac{(1+0,0179)^6 - 1}{0,0179(1+0,0179)^6}$$

$$a_{n\neg i} = \frac{(1,0179)^6 - 1}{0,0179(1,0179)^6}$$

$$a_{n\neg i} = \frac{1,11232 - 1}{0,0179 \times 1,11232}$$

$$a_{n\neg i} = \frac{0,11232}{0,01991} = 5,64135$$

Agora que determinamos o valor de $a_{n\neg i}$ podemos calcular o valor das prestações, conforme se segue

$$R = \frac{P}{a_{n\neg i}}$$

$$R = \frac{1315,37}{5,64135} = 233,17$$

Isso significa que a lavadora pode ser comprada à vista por 1315,37 reais ou em seis parcelas de 233,37.

Atividades de aprendizagem

3. A aquisição de um refrigerador será parcelada em 10 prestações mensais. Sabendo que o valor à vista do mesmo refrigerador é de R$ 1.300, e que a taxa de juros pelo crédito próprio da loja é de 2,8% ao mês, determine qual será o valor das parcelas

4. Qual o valor das oito prestações mensais na compra a prazo de um objeto cujo valor à vista é de $ 180, sabendo que o juro cobrado foi de 3% ao mês, no regime de juros compostos.

6.4 Cálculo do valor futuro (S) a partir do valor das prestações (T)

Neste tópico, veremos como calcular o valor de um valor futuro a partir de uma série de prestações. Este cálculo é muito útil para ajudá-lo a poupar para realizar seus projetos futuramente.

Imagine, por exemplo, que você tenha 20 anos e resolveu fazer um plano de previdência que irá pagar mensalmente até os 60 anos, quando se aposentará. Ao fazer o cálculo, descobriu que serão 40 anos de aplicação, ou seja, 480 meses (40 x 12 meses). Em consulta ao gerente do banco, ele informa que há um a plano de aplicação de R$ 70,00 mensais e que a taxa de juros é de 0,85% ao mês.

Mas, qual será o valor acumulado quando você tiver completado 60 anos? Vamos descobrir!

Primeiramente vamos definir as variáveis:

S (valor futuro) = ?

n (número de períodos) = 480

T(valor das parcelas) = 70

i= 0,85% ao mês$=\dfrac{0,85}{100}=0,0085$

De forma análoga aos tópicos anteriores, primeiramente calcularemos $s_{n\neg i}$,("s, n, cantoneira, i" ou "a, n, i").

$$s_{n\neg i}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$s_{n\neg i}=\frac{(1+0,0085)^{480}-1}{0,0085}$$

$$s_{n\neg i}=\frac{(1,0085)^{480}-1}{0,0085}$$

$$s_{n\neg i}=\frac{58,1344-1}{0,0085}$$

$$s_{n\neg i}=\frac{57,1344}{0,0085}=6271,69457$$

Já calculamos o valor $s_{n\neg i}$, o que nos permite calcular o valor futuro (S), conforme se segue,

S = T × $s_{n\neg i}$

S=70 × 6271,69457

S= 470.518,62

Portanto, dadas as condições acima, até a sua aposentadoria, você terá acumulado o valor de R$ 470.518,62.

Atividades de aprendizagem

5. Um investidor efetuou quatro depósitos anuais de $5.000 em determinado fundo de renda fixa. Sabendo que esses depósitos são remunerados com uma taxa efetiva de 10% ao ano, no regime de juros compostos, determine o valor acumulado por esse investidor no final do quarto ano.

6. Uma pessoa deposita $ 600 no final de cada mês. Sabendo que seu ganho é de 1,5% ao mês, quanto possuirá em dois anos?

6.4 Cálculo do valor das prestações (T), a partir do valor futuro

Este modelo de cálculo é útil quando você já tem definido o valor que precisará no futuro e deseja conhecer o valor necessário nos depósitos mensais para conseguir acumular o valor pretendido. Um exemplo disso é quando você deseja fazer uma viagem de férias daqui a 12 meses. A viagem custará R$ 3.000,00 e, para realizar o seu sonho, você deseja realizar depósitos mensais até lá, já que o valor depositado renderá 1% ao mês. Neste caso, qual deverá ser o valor depositado?

Primeiramente vamos definir as variáveis:

S (valor futuro) = 3000

n (número de períodos) = 12

T(valor das parcelas) = ?

i= 1% ao mês= $\frac{1}{100}=0,01$

Primeiramente, calcularemos $s_{n\neg i}$,conforme abaixo,

$$S_{n\neg i}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$S_{n\neg i}=\frac{(1+0,01)^{12}-1}{0,01}$$

$$S_{n\neg i}=\frac{(1,01)^{12}-1}{0,01}=\frac{1,126825-1}{0,01}$$

$$S_{n\neg i}=\frac{0,126825}{0,01}=12,6825$$

Como já temos o valor de $s_{n\neg i}$ é muito fácil saber o valor das prestações mensais, como mostramos a seguir.

$$T=\frac{S}{S_{n\neg i}}$$

$$T=\frac{3000}{12,6825}=236,55$$

Para realizar sua viagem, serão necessários 12 depósitos mensais de R$ 236,55.

Estamos chegando ao final de mais uma aula e, como você percebeu, o conteúdo aqui trabalhado é muito importante e tem aplicação prática em sua vida. Vamos ao resumo de nossa aula e pratique o que aprendeu realizando as atividades de aprendizagem.

Resumo

Nesta aula vimos que séries ou anuidades são uma sequência de pagamentos ou recebimentos. Estas séries podem ser classificadas:

- Quanto ao prazo, as quais se classificam em temporárias ou perpétuas. São denominadas de temporárias, quando a duração for limitada e perpétuas, quando a duração for ilimitada.

- Quanto ao valor dos termos: podendo estes ser constantes, ou seja, com pagamentos mensais e iguais; ou variáveis, ou seja, com mensalidades variáveis.

- Quanto à forma de pagamento ou de recebimento: dividindo-se em antecipadas, postecipadas ou diferidas. Os pagamentos postecipados, objetos de nosso estudo, podem ser também chamados de vencidos, uma vez que são aqueles pagos no fim dos períodos.

Para calcular o valor presente (P) de uma série, ou o valor da prestação (R) a partir do valor presente, utilizamos as seguintes variáveis e equações:

P = principal (valor atual ou valor à vista)

n = número de termos (prestações)

R = termos (prestações)

i = taxa de juros

Diz-se que o principal vai ser pago em "n" parcelas (prestações) iguais a "R".

$a_{n\neg i}$, lê-se "a, n, cantoneira, i" ou "a, n, i".

O fator usado para o cálculo do valor de uma prestação ou do valor presente é dado pela equação.

$$a_{n\neg i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

sendo que o valor presente é definido por:

$P = R \times a_{n\neg i}$

e o valor da prestação é resultante da seguinte equação.

$$R = \frac{P}{a_{n\neg i}}$$

$$R = \frac{1315,37}{5,64135} = 233,17$$

De modo análogo, também é calculado o valor futuro (S) a partir do valor das prestações (T) e vice-versa, conforme síntese a seguir.

S (valor futuro)

n (número de períodos)

T (valor das parcelas)

i (taxa de juros)

Para resolver operações de séries que envolvem valores futuros, é necessário calcular $S_{n\neg i}$,("s, n, cantoneira, i" ou "a, n, i").

$$S_{n\neg i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

O valor futuro de uma série uniforme é dado por:

$S = T \times S_{n\neg i}$

Já o valor das prestações, encontradas a partir de um valor futuro conhecido, é calculado pela equação a seguir.

$$T = \frac{S}{S_{n\neg i}}$$

Atividade de aprendizagem

7. Quanto se deve aplicar mensalmente, durante 20 meses, à taxa de 2,5% ao mês, para que se tenha $ 6.000 no final do vigésimo mês, no regime de juros compostos.

Caro(a) estudante,

Chegamos ao final da sexta aula da disciplina Matemática Financeira. Você já parou para pensar no quanto já caminhou em seu processo de aprendizagem? Com mais este conteúdo você tomou conhecimento sobre a série uniforme, que são aplicações ou pagamentos com parcelas periódicas. Acreditamos que esse estudo trouxe informações de grande utilidade em seu dia a dia.

Na próxima aula, o tema será: amortização. Você tem ideia do que se trata amortização? Prepare-se para este novo assunto. Até a próxima aula!

Aula 7. Amortização

Objetivos:

- analisar os fundamentos dos principais sistemas de amortizações, identificando as vantagens ou desvantagens para o comprador;
- identificar porque os juros a longo prazo podem onerar o devedor.

Prezado (a) estudante,

Esta é a nossa sétima aula da disciplina Matemática Financeira. Abordaremos, nesta etapa, o tema amortização. A amortização, de certa forma, é uma continuidade da aula anterior, pois ambas exploram as séries de pagamento. Porém, no assunto anterior, abordamos somente as séries com pagamento mensais iguais, enquanto neste conteúdo trataremos também sobre pagamento não uniforme. Outra novidade é compreender que em amortização temos a possibilidade de identificar o quanto está sendo pago de juros e o quanto está sendo efetivamente amortizado da dívida.

Boa aula!!!

7.1 Amortização

O assunto amortização de empréstimo é um dos mais importantes para a maioria das pessoas e a razão disso é muito simples. Uma grande parcela da população quer ou necessita consumir ou adquirir um bem, seja para a própria sobrevivência, ou mesmo para sentir-se realizada, porém nem sempre tem a disponibilidade de recursos financeiros para tal realização. Nesses casos, a alternativa é recorrer a fontes de financiamentos para a realização de seus desejos ou necessidades, comprometendo-se em devolver o recurso futuramente.

Porém, é lógico que aquele que empresta o recurso cobrará alguma vantagem financeira, ou seja, juros pelo tempo em que o recurso ficar emprestado.

Por exemplo, uma família, que necessita de uma casa para morar, encontra um imóvel no valor de R$ 100.000,00. Não tendo essa importância para pagamento à vista, recorre a uma instituição financeira que custeará , cobrando uma taxa de juros. Na figura a seguir, que consiste no simulador habitacional retirado do site da Caixa Econômica Federal, exemplificamos que uma família com uma renda de R$ 1800,00, financiaria um imóvel de R$ 100.000,00 nas seguintes condições. Daria uma entrada de R$ 6.412,00 e receberia um subsídio do Governo Federal por meio do Programa Minha Casa Minha Vida de R$ 13.588,00.

Porém, ainda faltariam R$ 80.000,00, os quais seriam parcelados em 360 meses, a uma taxa de juros nominal de 4,5% ao ano acrescidos de taxa referencial (TR), ou seja, efetiva de 4,5939% ao ano acrescidos de TR.

Este caso traz ainda outras situações como o sistema de amortização adotado, o valor de cada parcela e outros custos devidos pelo comprador do imóvel. Porém, deixaremos esta discussão para mais adiante.


Aquisição de Imóvel Novo
Pessoa Física
Cidade: PORTO VELHO-RO
Possui 3 anos de trabalho sob regime do FGTS:
Sim
Você ou imóvel objeto do financiamento já foi beneficiado com subsídio concedido pelo FGTS/União:
Não
Valor do Imóvel: R$ 100.000,00
Renda Bruta: R$ 1.800,00
Data de Nascimento: 01/01/1980

PMCMV - Aquisição de Imóvel Novo - Balcão.

Valor do Imóvel	Prazo Máximo	Sistema de Amortização	Cota máxima financiamento
R$ 100.000,00	**360 meses**	**SAC**	**80%**

Valor da Entrada
R$ 6.412,00
Valor do financiamento
R$ 80.000,00
Prazo desejável
360 meses
Valor subsídio complemento
R$ 13.588,00
ALTERAR

A Caixa oferece opções para escolha da seguradora do seu financiamento imobiliário.
Ver condições contratuais.

Opção básica

Juros Nominais (1)	4.5000% a.a. + TR%
Juros Efetivos (1)	4.5939 % a.a. + TR%
1ª Prestação	**R$ 533,40** demais prestações
Última Prestação	R$ 223.05

Fonte: Disponível em< http://www8.caixa.gov.br/siopiinternet/simulaOperacaoInternet.do;jsessionid=BA82F8206AF982504DCEC973E8737504?method=enquadrarProdutos#>

A amortização é um processo financeiro pelo qual uma dívida é paga progressivamente por meio de parcelas, de modo que, ao término do prazo estipulado, o débito seja liquidado. Essas parcelas ou prestações são constituídas de duas partes: amortização e juros (SAMANEZ, 2010).

Prestação = amortização + juros

De acordo com Samanez (2010, p. 155):

> essa separação permite discriminar o que representa a devolução do principal (amortização) daquilo que representa o serviço da dívida (os juros), o que é muito importante para as necessidades jurídico-contábeis e para a análise de investimentos, em que os juros, por serem dedutíveis para efeitos tributáveis, têm um efeito fiscal.

Mas, você sabia que existem diversos métodos diferentes para se calcular a amortização? É isso mesmo! Entre eles estão os seguintes:

- Sistema de amortização constante (SAC)
- Sistema de amortização francês ou Price
- Sistema de amortização americano
- Sistema de amortização crescente (Sacre)
- Sistema de amortização livre

De acordo com Gimenes (2009), o sistema de amortização crescente (Sacre) foi utilizado pela Caixa Econômica Federal entre os anos de 1999 e 2005 para a amortização de crédito imobiliário, porém já foi extinto. Quanto aos demais, no Brasil assume maior relevância os sistemas de amortização SAC e Price e, portanto, em nossa aula nos restringiremos ao estudo destes dois sistemas. Gimenes (2009, p. 188 e 195) afirma que o sistema de amortização constante tem ampla aplicação no Brasil, sendo utilizado "em financiamentos de longo prazo principalmente no setor produtivo", enquanto o sistema Price "é muito utilizado nos financiamento em geral, como na compra de um carro, de um eletrodoméstico, num empréstimo pessoal, entre outros."

Amortização: é a devolução do valor principal emprestado.

Juros: é a remuneração dobrada pelo empréstimo do dinheiro, que, neste, corresponde ao saldo do empréstimo não amortizado.

7.1.1 Noções básicas sobre amortização

Agora se faz necessária a apresentação de alguns princípios, como será demonstrado a seguir. De acordo com Gimenes (2009), existem dois conceitos básicos por trás de qualquer sistema de amortização de empréstimos.

Primeiro conceito - Toda parcela (R) é formada por uma parte referente à amortização e outra parte referente aos juros, ambos pagos em um período específico. De maneira simples, pode-se afirmar que a parcela (R) é igual à soma de uma parcela de amortização (A) mais uma parcela de juro (J).

$$R_n = A_n + J_n$$

Assim: R é a parcela paga no período n; A representa a amortização referente a esse período: e J_n, os juros nele pagos.

Esta fórmula deve ser utilizada toda vez que se deseja calcular o valor de uma parcela em determinado período n.

Segundo conceito - A parte da parcela referente aos juros nela auferidos é calculada com base no período anterior, em função da taxa periódica acertada.

$$J_n = SD_{n-1} \times i$$

Assim: *J* representa os juros pagos em uma referida parcela no período n. Estes são calculados sobre o saldo devedor do período anterior (SD_{n-1}) e i é a taxa cobrada no financiamento.

Resumindo, o juro incide sobre o saldo devedor do período anterior.

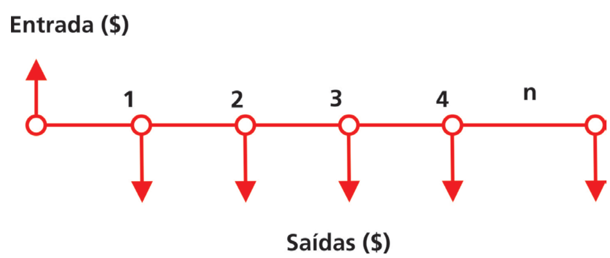
Com esta fórmula, é possível calcular os juros que devem ser pagos em determinado período *n*.

7.1.2 Representação gráfica de uma operação de amortização

É importante que, para toda operação de amortização, uma tabela seja montada e seus fluxos sejam representados em um diagrama. Esse procedimento, além de evitar erros comuns, possibilita uma fácil conferência dos resultados encontrados.

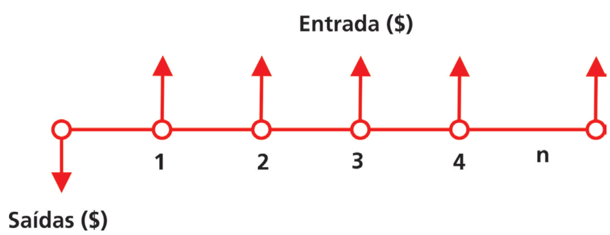
As representações dos fluxos de caixa podem ser feitas na visão do financiador e do tomador de um empréstimo, conforme veremos.

a) Fluxo de caixa na visão do tomador



Fonte: autor

b) Fluxo de caixa na visão do financiador



Fonte: autor

Os diagramas acima representam uma mesma operação de crédito sob óticas diferentes: do tomador que recebe recursos no instante zero e depois os paga em algumas parcelas e, por outro lado, do financiador que fornece recursos no instante zero para depois recebê-los, nesse caso, parcelados.

O que é o saldo devedor?

O saldo devedor de um financiamento consiste na diferença entre o valor financiado reajustado e o valor total que já foi amortizado (pago) até o momento.

Em outras palavras é o valor que ainda resta a ser pago.

7.2 Sistema de amortização constante (SAC)

De acordo com Gimenes (2009, p. 188), no SAC, como o próprio nome diz, o valor da amortização é constante, ou seja, é o mesmo para todos os períodos. Isso somente será possível se o saldo devedor inicial for dividido pelo número de períodos envolvidos no financiamento.

$$Amortização = \frac{Saldo\ Devedor_{\ período\ zero}}{Número\ de\ parcelas}$$

$$A = \frac{SD_0}{n}$$

Assim: A é o valor da parcela de amortização; SD_n é o saldo devedor inicial (valor financiado); e *n*, o número de períodos ou de parcelas.

Conforme o mesmo autor, "a principal característica das parcelas no sistema SAC é a redução uniforme de valor de um período para outro. Esse fato ocorre devido às amortizações constantes que reduzem proporcionalmente o saldo devedor."(2009,p.191)

Mas, talvez você esteja em dúvida se o valor da parcela é a mesma coisa que amortização, não é mesmo?!

Pois bem, para esclarecer esta dúvida, convém salientar que a parcela de um empréstimo ou financiamento é composta de juros sobre a dívida, amortização, além de outras despesas bancárias, tais como, taxa de administração e seguros. Mas em nosso estudo, vamos considerar apenas os juros e a amortização, já que as demais despesas são definidas contratualmente junto às instituições financeiras e cada uma delas possui as suas regras específicas.

Vamos ilustrar com um exemplo para facilitar a sua compreensão.

1. Uma empresa pede emprestados R$ 10.000,00 que o banco entrega no ato. Sabendo que os juros serão pagos anualmente, que a taxa de juros é de 10% ao ano e que o principal será amortizado em quatro parcelas anuais, construir a planilha.

A partir do exemplo dado, vamos calcular a amortização:

$$A = \frac{SD_0}{n}$$

$$A = \frac{10000}{4} = 2500$$

Agora que já calculamos a amortização mensal, vamos iniciar a montagem da tabela de amortização.

A montagem de uma tabela de amortização é simples. De maneira didática, propõe-se que as colunas tenham a seguinte ordem:

N: Representa os períodos.

SD: Saldo devedor no final de um período.

A: Parcela que será amortizada no período.

P: Pagamento efetuado pelo tomador do financiamento em um período.

Procedimentos de preenchimento da planilha de amortização:

a) A planilha de amortização possui uma linha para cada período, inclusive para o período zero (data da realização do empréstimo ou financiamento). No exemplo dado, o empréstimo está dividido em quatro parcelas, o que significa que a planilha conterá linhas de enumeradas de 0 a 4.

b) No período 0 (zero) o saldo devedor é a própria dívida contratada, uma vez que não há amortização, bem como não há incidência de juros e, assim, não há prestação a pagar.

c) A amortização no SAC é igual em todas as parcelas.

d) O saldo devedor (SD) em cada período n é resultante do SD_{n-1}(do período anterior) menos a amortização A (do período atual). Exemplos: no período 1, o SD é igual a 10000 – 2500 = 7500; no período 2, SD é igual a 7500 – 2500 = 5000 e assim sucessivamente.

e) A prestação no período 1 é resultante da soma da amortização e dos juros do período.

Após as considerações acima, vamos preencher a planilha de amortização, para a dívida de 10.000 dividida em quatro parcelas anuais à taxa de 10 ao ano.

N	$SD_n = SD_{n-1}$ - A	A = SD_0 / n	J = SD_{n-1} x i	P = A - J
0	10000			
-	-	-		
1	10000 – 2500 = **7500**	10000 / 4 =**2500**	10000 x 0,1 = **1000**	2500 + 1000 = **3500**

O saldo devedor atual é igual a 10.000 do período anterior menos 2500 de amortização atual

A amortização foi obtida por meio da divisão de 10.000 (dívida inicial) por 4 (número de parcelas)

Os juros são iguais ao saldo devedor anterior multiplicado pela taxa de juros

A prestação é a soma da amortização e os juros

De modo similar, é possível calcular os valores para os demais períodos, conforme se segue.

N	SDn = SD_{n-1} - A	A = SD_0 / n	J = SD_{n-1} x i	P = A - J
0	10000	-	-	-
1	10000 – 2500 = **7500**	10000 / 4 =**2500**	10000 x 0,1 = **1000**	2500 + 1000 = **3500**
2	7500 – 2500 = **5000**	10000 / 4 = **2500**	7500 x 0,1 = **750**	2500 + 750 = **3250**
3	5000 – 2500 = **2500**	10000 / 4 = **2500**	5000 x 0,1 = **500**	2500 + 500 = **3000**
4	2500 – 2500 = **0**	10000 / 4 = **2500**	2500 x 0,1 = **250**	2500 + 250 = **2750**
Total	**-**	**10000,00**	**2500,00**	**12500,00**

Conforme demonstrado na planilha, o valor total pago é de R$ 12.500,00, sendo R$ 10.000,00 do empréstimo e R$ 2.500,00 de juros.

Percebeu como é bastante simples elaborarmos uma planilha de amortização do sistema SAC.

7.2.1 Cálculo das parcelas no sistema SAC

A principal característica das parcelas no sistema SAC é a redução uniforme de valor de um período para outro. Esse fato ocorre devido às amortizações constantes, que reduzem proporcionalmente o saldo devedor de cada período.

A parcela P é calculada pela soma da amortização A com os juros incidentes sobre o valor inicial (SD_0 x i).

É importante ressaltar que a queda do saldo devedor é uniforme. Portanto, o saldo devedor no período 1 é encontrado facilmente se o valor da amortização for subtraído do valor inicial (SD_0). Sobre esse valor incide a taxa de juros referente ao seguinte período, que é somada à amortização e assim a parcela P é calculada.

Dessa forma, podemos sistematizar uma fórmula genérica para calcular a prestação a cada período, conforme se segue:

N	P
1	$P_1 = A + (SD_0 \times i)$
2	$P_2 = A + (SD_0 - 1 \times A) \times i$
3	$P_3 = A + (SD_0 - 2 \times A) \times i$
4	$P_4 = A + (SD_0 - 3 \times A) \times i$
n	$P_n = A + (SD_0 - (n-1) \times A) \times i$

No terceiro período, tal operação se repete, com uma sutil diferença: do valor inicial (SD_0) se subtrai duas vezes o valor da amortização; depois, os juros são calculados e somados à amortização do referido período. Esse processo se repete 'ene' vezes. A seguir será demonstrada a fórmula final para o cálculo do valor de uma parcela em determinado período.

Note que, para o período 3, o valor de duas amortizações é subtraído do valor inicial (SD_0). Para o período 4, o valor de três amortizações deve ser subtraído do valor inicial (SD_0).

Logo, para o período n, o valor de (n – 1) amortizações deve ser subtraído do valor inicial (SD). Portanto:

$$P_n = A + (SD_0 - (n-1) \times A) \times i$$

Vamos aplicar o que aprendemos em um exemplo prático:

Um financiamento de um imóvel foi contrato pelo sistema SAC. Sabendo que o total da dívida é de 90.000 e que foi parcelado em 120 vezes, a uma taxa de 1% ao mês, calcule

o valor da 20ª parcela.

Primeiro, vamos calcular o valor da amortização, sendo

$$A = \frac{SD_0}{n}$$

$$A = \frac{90000}{120} = 750$$

Agora que já conhecemos o valor da amortização mensal, podemos calcular o valor da 20ª parcela, conforme se segue:

$$P_n = A + (SD_0 - (n-1) \times A)i$$
$$P_{20} = 750 + (90000 - 19 \times 750) \times 0,01$$
$$P_{20} = 750 + (90000 - 14250) \times 0,01$$
$$P_{20} = 750 + (75750) \times 0,01$$
$$P_{20} = 750 + 757,50$$
$$P_{20} = 1507,50$$

Portanto, o valor da 20ª parcela é igual a 1507,50.

7.2.2 Cálculo do saldo devedor no sistema SAC

Da mesma forma que calculamos o valor de amortização, também o valor do saldo devedor será facilmente encontrado. Para o primeiro período, basta subtrair uma amortização do valor inicial (SD0); no segundo período, duas amortizações devem ser subtraídas; no terceiro período, três amortizações devem ser subtraídas do saldo devedor financiado. Portanto, em n períodos, n amortizações devem ser subtraídas do valor inicial para o cálculo do saldo devedor nesse instante n, a partir do que podemos construir a seguinte fórmula.

N	P
1	$SD_1 = SD_0 - (1 \times A)$
2	$SD_2 = SD_0 - (2 \times A)$
3	$SD_3 = SD_0 - (3 \times A)$
4	$SD_4 = SD_0 - (4 \times A)$
n	$SD_n = SD_0 - (n \times A)$

Assim: SD_n é o saldo devedor no instante **n** qualquer e A é o valor fixo da amortização.

Assim como podemos calcular o valor de uma parcela qualquer da amortização, conforme mostramos no tópico anterior, você também pode calcular o saldo devedor. Para ficar mais claro, vamos calcular o saldo devedor do caso acima, que ainda restará após o pagamento da 20ª parcela.

$$SD_n = SD_0 - (n \times A)$$
$$SD_{20} = 90000 - (20 \times 750)$$
$$SD_{20} = 90000 - 15000$$
$$SD_{20} = 75000$$

Atividades de aprendizagem

1. Uma casa está sendo financiada por R$ 150.000, a serem pagos em 180 parcelas mensais, pelo sistema SAC. Sabendo que a taxa de juros a ser contratada é de 0,5% ao mês, calcule o que se pede:

a) Saldo devedor na 30ª parcela.

b) Prestação devida na 30ª parcela.

2. Um telefone celular que custa R$ 300, foi parcelado em três meses, a uma taxa de 2% ao mês, pelo SAC. Monte a planilha de amortização.

N	$SD_n = SD_{n-1} - A$	$A = SD_0 / n$	$J = SD_{n-1} \times i$	$P = A - J$
Total				

7.3 Sistema de amortização Price

Esse sistema é muito utilizado nos financiamentos em geral, como na compra de um carro, de um eletrodoméstico, num empréstimo pessoal, entre outros. Você pode identificar o sistema Price se o vendedor utilizar uma tabela de fatores para calcular o valor das parcelas fixas.

Conforme observa Sandrini (2007, 57):

> esse sistema é mais conhecido no Brasil como Tabela Price, que consiste em um plano de amortização de uma dívida em prestações periódicas, iguais e sucessivas, dentro do conceito de termos vencidos, em que o valor de cada prestação é composto por duas parcelas distintas: uma de encargos financeiros (juros) e outra de capital (amortização).

Como consequência do modelo de prestações iguais, tem-se que à medida que o saldo devedor diminui, com as amortizações mensais, o devedor terá menos juros a pagar nas parcelas vincendas. A partir deste raciocínio, é fácil concluir que, se as parcelas são iguais, então os juros das parcelas periódicas são decrescentes e, por sua vez, as amortizações, crescentes.

Que tal explicarmos utilizando um exemplo prático. Com certeza será muito mais fácil para você compreender. Vamos utilizar o mesmo exemplo aplicado no tópico sobre o SAC.

1. Uma empresa pede emprestados R$ 10.000,00 que o banco entrega no ato. Sabendo que os juros serão pagos anualmente, que a taxa de juros é de 10% ao ano e que o principal será amortizado em quatro parcelas anuais, construir a planilha.

Cálculo da prestação:

No sistema Price a parcela é calculada pelo método que aprendemos na aula 6, conforme iremos mostrar.

$$R = \frac{P}{a_{n\neg i}}$$

Assim,

$$a_{n\neg i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

Temos que,

P = 10000

i= 10% ao ano

n = 4

Façamos:

$$a_{n\neg i} = \frac{(1+0,1)^4 - 1}{0,1(1+0,1)^4}$$

$$a_{n\neg i} = \frac{1,1^4 - 1}{0,1 \times 1,1^4}$$

$$a_{n\neg i} = \frac{1,4641 - 1}{0,1 \times 1,4641}$$

$$a_{n\neg i} = \frac{0,4641}{0,14641} = 3,169865$$

Agora que já calculamos o valor de $a_{n\neg i}$ podemos calcular o valor da prestação, conforme se segue.

$$R = \frac{P}{a_{n\neg i}}$$

$$R = \frac{10000}{3,169865} = 3154,71$$

O valor das prestações deste financiamento será igual a 3.154,71.

De modo análogo ao que mostramos no sistema de amortização constante, faremos a montagem de uma tabela de amortização com as colunas na seguinte ordem:

N: Representa os períodos.

SD: Saldo devedor no final de um período.

A: Parcela que será amortizada no período.

P: Pagamento efetuado pelo tomador do financiamento em um período.

N	$SD_n = SD_{n-1}$ - A	A = P - J	J = SD_{n-1} x i	P
0	10000,00	-	-	-
1	10000 – 2154,71 = **7845,29**	3154,71 – 1000 = **2154,71**	10000 x 0,1 = **1000**	3.154,71

O saldo devedor atual é igual a 10.000 do período anterior menos 2154,71 de amortização atual

A amortização é igual à parcela atual menos os juros do período

Os juros são obtidos pela multiplicação do saldo devedor anterior pela taxa de juros

As prestações são encontradas pelo cálculo de séries uniformes, e são iguais em todos os períodos

Do mesmo modo podem ser calculados para os demais períodos, conforme planilha a seguir.

N	SDn = SD_{n-1} - A	A = P - J	J = SD_{n-1} x i	P
0	10000,00	-	-	-
1	10000 – 2154,71 = **7845,29**	3154,71 – 1000 = **2154,71**	10000 x 0,1 = **1000**	3.154,71
2	7745,29 – 2370,19 = **5475,11**	7845,29 – 784,53 = **2370,18**	7845,29 x 0,1 = **784,53**	3.154,71
3	5475,11 – 547,51 = **2.867,92**	5475,11 – 547,51 = **2607,20**	5475,11 x 0,1 = **547,51**	3.154,71
4	2867,92 – 2867,92 = **0**	2867,92 – 286,79 = **2867,92**	2867,92 x 0,1 = **286,79**	3.154,71
Total	**-**	**10.000,00**	**2.618,83**	**12.618,83**

Como demonstrado na planilha acima, o valor total pago é de R$ 16.618,83, sendo destes R$ 10.000,00 de amortização e R$ 2.618,83 de juros.

Resumo

Vimos nesta aula que amortização de empréstimo é muito importante para a maioria das pessoas, uma vez que estas necessitam consumir e devolver o recurso futuramente.

A amortização é um processo financeiro pelo qual uma dívida é paga progressivamente por meio de parcelas, de modo que, ao término do prazo estipulado, o débito seja liquidado. Essas parcelas ou prestações são constituídas de duas partes: amortização e juros.

Prestação = amortização + juros

Entre os principais e mais utilizados sistemas de amortização de empréstimos, temos o Sistema de Amortização Francês (conhecido como Price), o Sistema de Amortizações Constantes (SAC), e o Sistema de Amortização Americano.

As representações dos fluxos de caixa podem ser feitas na visão do financiador e do tomador de um empréstimo, conforme veremos.

A principal característica das parcelas no sistema SAC é a redução uniforme de valor de um período para outro. Esse fato ocorre devido às amortizações constantes, que reduzem proporcionalmente o saldo devedor de cada período.

O Sistema Price é muito utilizado nos financiamentos em geral, seja na compra de um carro, de um eletrodoméstico ou num empréstimo pessoal, entre outros. A principal característica do sistema Price é que as parcelas são constantes e a é amortização, crescente.

Atividade de aprendizagem

3. Um televisor que é vendido à vista por R$ 900 foi comprado em cinco parcelas mensais, pelo sistema Price, a uma taxa de juros de 2% ao mês. Monte a planilha de amortização.

N	SDn = SDn – 1 - A	A = P - J	J = SDn – 1 x i	P
Total				

Prezado(a) estudante,

Você finalizou esta aula que tratou de amortizações pelo sistema de amortização constante e sistema Price. Na próxima aula, você vai ter oportunidade de conhecer sobre análise de investimentos. Continue atento(a) para melhor aproveitamento das informações que o novo conteúdo vai trazer.

Aula 8. Análise de investimentos

Objetivos:

- elaborar o fluxo de caixa de um projeto de investimento a partir das informações contidas em um texto;
- reconhecer os principais métodos de análise da viabilidade de um projeto de investimento; e
- analisar a viabilidade de um projeto de investimento.

Prezado(a) estudante,

Esta é a nossa oitava aula de Matemática Financeira. Trataremos agora de análise de investimentos e buscaremos levá-lo à compreensão da utilização de métodos de finanças, tais como valor presente líquido e taxa interna de retorno, elementos importantes para auxiliar na tomada de decisões de investimentos nas empresas, e por que não, também na vida pessoal.

Boa aula!

8.1 Análise de dados

Financeiramente, qualquer investimento pode ser analisado em função do lucro ou do prejuízo econômico que produz, da taxa percentual de retorno que proporciona ou do tempo que leva para retornar o investimento inicialmente despendido.

Para determinar tais indicadores, existe, na teoria financeira, uma diversidade de técnicas de análise de investimento, muito úteis ao gestor na avaliação e escolha de um projeto. Entre os principais métodos que o gestor pode considerar para a tomada de decisão, destacamos a taxa interna de retorno (TIR) e o valor presente líquido (VPL), admitidos por diversos teóricos como os de maior utilização e rigor conceitual nas análises de operações financeiras e de projetos de investimentos. (ASSAF NETO, 2006).

Mas, o que pode ser afinal considerado um projeto de investimento?

Projeto de investimento consiste em qualquer negócio que terá um investimento de recursos no intuito de se obterem lucros futuramente, tais como abrir uma empresa ou até mesmo um pequeno negócio. Podemos dar como exemplo um carrinho de pipoqueiro, um salão de estética, vendas de roupas, a abertura de um mercadinho, entre tantas outras opções.

8.2 Valor presente líquido (VPL)

O valor presente líquido (VPL) é uma das técnicas mais conhecidas e utilizadas na análise de investimentos. O objetivo do VPL é encontrar alternativas de investimento que rendam mais para os patrocinadores do que custam.

O cálculo desta técnica reflete as preferências entre consumo presente e consumo futuro e a incerteza associada aos fluxos de caixas futuros.

O processo por meio do qual os fluxos de caixa são ajustados a esses fatores chama-se descontos e a magnitude desses fatores é refletida na taxa de desconto usada, ou seja, no custo do capital.

Pelo processo de desconto, os fluxos de caixa futuros são convertidos em valores presentes, pois, como vimos na primeira aula, fluxos de épocas diferentes não podem ser comparados nem agregados enquanto não forem convertidos para valores de uma mesma época.

Por exemplo, considerando que uma alternativa de investimento requeira um desembolso inicial de R$10.000 que propiciaria a geração de fluxos de caixa de R$ 6.000 por ano durante dois anos, o VPL calculado a um custo do capital de 10% a.a. seria o seguinte:

Ano	Valor presente dos Fluxos de Caixa $= \frac{F_n}{(1+i)^n}$	Valores convertidos para o presente (data zero)
0	-10.000	-10.000
1	$P = \frac{6000}{(1+0,1)^1}$ $P = \frac{6000}{1,1} = 5454,54$	5.454,54
2	$P = \frac{6000}{(1+0,1)^2}$ $P = \frac{6000}{1,21} = 4958,68$	4.958,68
VPL (Valor do ano 1 e 2 no presente, subtraindo o valor investido		10.413,22 – 10.000 = 413,22

Pela demonstração acima, é possível perceber que o valor principal nos anos 1 e 2 que eram de R$ 6.000 foram convertidos para o valor presente. Além disso, do valor encontrado, correspondente aos anos 1 e 2, depois de convertidos para a data zero (valor presente), a qual é representada pela letra P, conforme visto na aula 3, subtraiu-se o valor do investimento inicial (R$ 10.000), restando R$ 413,22.

Isso significa que, dadas as condições de taxa de juros e fluxos de caixa previstos no problema, o investidor terá ganho líquido no valor de R$ 413,22.

Porém, seria muito trabalhoso fazer todos os cálculos acima, de modo que podemos utilizar a equação do VPL, que é representada por:

$$VPL = \left[\frac{FC_1}{(1+i)^1} + \frac{FC_2}{(1+i)^2} + \frac{FC_3}{(1+i)^3} + \ldots \frac{FC_n}{(1+i)^n} \right] - FC_0$$

Se observarmos a equação acima, é possível notar que o valor presente líquido de uma operação financeira ou projeto de investimento envolve dois raciocínios principais. Primeiro, temos que resolver a equação entre parênteses, a qual consiste no cálculo do valor presente de todos os fluxos de caixa futuros, ou seja, consiste em trazer todos os valores projetados nas diferentes parcelas, para o valor presente.

Após calculado o valor presente dos fluxos de caixa constantes entre parênteses, deve-se, então, subtrair o valor do investimento (FC_0) e o resultado deste cálculo será o valor do VPL.

Observe a expressão "valores projetados". Eles são projetados, ou estimados, uma vez que o VPL quase sempre será utilizado para calcular a previsão de retorno de um projeto de investimento e, portanto, algo ainda por se realizar e, é claro, nestes casos serão previsões matemáticas, passiveis de não ocorrer.

Para fins de tomada de decisão com base no VPL, utilizam-se duas regras:

Para aceitar ou rejeitar projeto	Para classificar o projeto
VPL > 0 (projeto continua sendo analisado)	Quanto maior, melhor
VPL < 0 (projeto rejeitado)	

Fonte: adaptado de Camargo (2007).

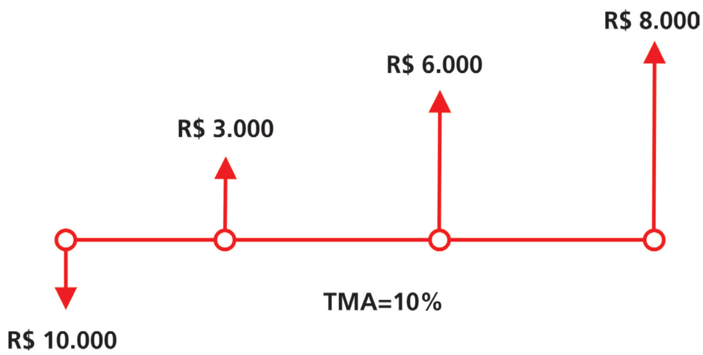
Vale ressaltar, porém, um VPL positivo mostra que o investimento analisado é mais rentável do que a aplicação alternativa na TMA, mas isso não significa que o projeto seja a melhor opção, pois, se tivermos dois projetos com VPL positivo, não significa que aquele com menor VPL será o mais rentável, devendo, portanto ainda ser analisado por meio de outras técnicas.

Um VPL negativo indica que é mais rentável aplicar na TMA do que no investimento proposto, sendo este rejeitado por reduzir o potencial de ganhos da empresa.

Para uma melhor compreensão dessa conceituação, analisemos a sua aplicação nos exemplos a seguir.

1. O administrador financeiro de uma empresa está considerando um investimento que requer desembolso inicial de R$ 10.000,00. Ele espera entradas de caixa de R$ 3.000,00 no fim do primeiro ano, R$ 6.000,00 no fim do segundo, R$ 8.000,00 no fim do terceiro ano. Levando em conta que o custo de capital da empresa é de 10% ao ano, determine se o projeto é atrativo para a empresa.

O primeiro passo é representar o investimento por meio da linha do tempo, o que facilita seu entendimento.



Fonte: autor

Para calcular o VPL utilizamos a equação seguinte:

$$VPL = \left[\frac{FC_1}{(1+i)^1} + \frac{FC_2}{(1+i)^2} + \frac{FC_3}{(1+i)^3} + \ldots \frac{FC_n}{(1+i)^n}\right] - FC_0$$

$$VPL = \left[\frac{3000}{(1+0,1)^1} + \frac{6000}{(1+0,1)^2} + \frac{8000}{(1+0,1)^3}\right] - 10000$$

$$VPL = \left[\frac{3000}{(1,1)^1} + \frac{6000}{(1,1)^2} + \frac{8000}{(1,1)^3}\right] - 10000$$

$$VPL = \left[\frac{3000}{1,1} + \frac{6000}{1,21} + \frac{8000}{1,331}\right] - 10000$$

$$VPL = [2727,27 + 4958,68 + 6010,52] - 10000$$

$$VPL = 13696,47 - 10000 = 3696,47$$

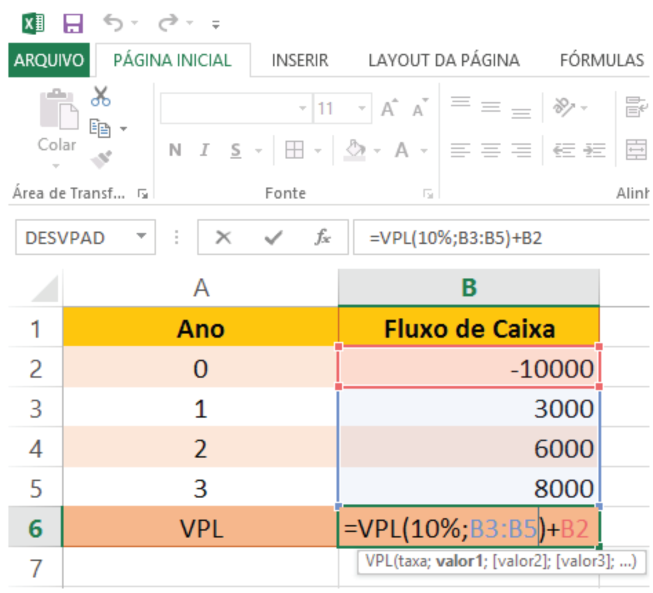
O valor presente líquido deste projeto de investimento é de R$ 3.696,47. Isso significa que, se somarmos o valor presente de todos os fluxos de caixa projetados (previstos) e subtrairmos o valor investido, sobrará R$ 3.696,47.

8.2.1 Cálculo do VPL no Excel

Outra forma bem mais simples de se calcular o VPL de um projeto é utilizando o Excel. Para calcularmos, é necessário que coloquemos todos os fluxos de caixa em uma única coluna, inclusive o valor do investimento.

Como se observa na figura a seguir, o valor correspondente ao ano zero é negativo, isso porque este é uma saída de caixa. Já os fluxos de caixa correspondentes aos anos 1 a 3 são positivos (entradas de caixa).

Após inserirmos todos os fluxos de caixa, podemos calcular o VPL, conforme mostra a célula B6 (=VPL(10%;B3:B5)+B2), em que 10% é a taxa de descontos; B3:B5 é o intervalo dos fluxos de caixa e B2 é o valor do investimento inicial.



	A	B
1	Ano	Fluxo de Caixa
2	0	-10000
3	1	3000
4	2	6000
5	3	8000
6	VPL	=VPL(10%;B3:B5)+B2
7		

Atividade de aprendizagem

1. João é pipoqueiro, numa cidade do interior, mas decidiu morar na Capital durante quatro anos, que será o tempo necessário para fazer um curso na faculdade. Durante este tempo, ele pensa trabalhar como pipoqueiro. Com base nos valores dos fluxos de caixa a seguir, calcule o VPL e verifique se o investimento é viável. O investimento inicial será de R$ 5.000 a uma taxa de juros de 18% ao ano. Após o pagamento de todas as despesas, inclusive a remuneração de seu trabalho, lhe sobrará R$ 2.000 no final do primeiro ano, R$ 3.500 no segundo, R$ 2.500 no terceiro e R$ 2.000 no último ano.

8.3 Taxa interna de retorno (TIR)

A taxa interna de retorno (TIR) é a taxa de remuneração que se obtém sobre determinado fluxo de caixa. A TIR é a taxa de juros que iguala, em determinado tempo, o valor presente das entradas (recebimentos) com o das saídas (pagamento) previstos de caixa.

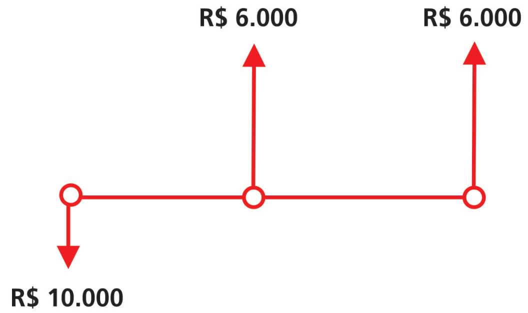
Geralmente, adota-se a data de início de operação como a data do cálculo. Como vimos com a técnica do VPL, quando um fluxo de caixa apresenta VPL positivo, significa que o investimento está remunerado mais do que o custo do capital utilizado no cálculo. Por outro lado, se o VPL for negativo, isso quer dizer que o investimento está rendendo menos do que o custo do capital.

Matematicamente, a TIR é uma taxa hipotética que anula o VPL, ou seja, é aquele valor de i que satisfaz a seguinte equação:

$$TIR \Rightarrow FC_0 = \frac{FC_1}{(1+i)^1} + \frac{FC_2}{(1+i)^2} + \frac{FC_3}{(1+i)^3} + \ldots \frac{FC_n}{(1+i)^n}$$

Retomando o exemplo utilizado no cálculo do VPL, vamos calcular a taxa interna de retorno.

Uma alternativa de investimento requer um desembolso inicial de R$ 10.000 que propiciará a geração de fluxos de caixa de R$ 6.000 por ano durante dois anos, o VPL calculado a um custo do capital de 10% ao ano.



O cálculo da TIR algebricamente não é algo muito simples, pois envolve uma equação polinomial de grau igual ao número de períodos do investimento. Por exemplo, se o investimento tiver dois períodos, envolverá uma equação de 2º grau, como veremos abaixo, será de 3º grau se tiver três períodos e assim por diante.

$$FC_0 = \frac{FC_1}{(1+i)^1} + \frac{FC_2}{(1+i)^2} + \frac{FC_3}{(1+i)^3} + \ldots \frac{FC_n}{(1+i)^n}$$

$$10000 = \frac{6000}{(1+i)^1} + \frac{6000}{(1+i)^2}$$

Observe que, na equação acima, temos que isolar o i e o primeiro passo para a resolução é transformar em uma fração de denominador igual, em que $(1 + i)^2$ é o mínimo múltiplo comum.

$$\frac{10000(1+i)^2}{\cancel{(1+i)^2}} = \frac{6000(1+i)+6000}{\cancel{(1+i)^2}}$$

$$10000(1+i)^2 = 6000 + 6000(1+i)$$

Como todos os termos são múltiplos de 1000, podemos colocá-los em evidência a fim de simplificar a equação.

$$\cancel{1000}[10(1+i)^2] = \cancel{1000}[6(1+i)+6]$$
$$10(1+i)^2 = 6(1+i)+6$$
$$10(1+i)^2 - 6(1+i) - 6 = 0$$

Observe que a equação encontrada acima é uma equação de segundo grau, na qual a variável é (1 + i), pois se substituíssemos por x teríamos $10x^2 - 6x - 6 = 0$ e, com isso, podemos encontrar as duas raízes da variável (1 + i), utilizando-nos do teorema de Baskara, conforme se segue:

$$(1+i) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(1+i) = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 10 \times (-6)}}{2 \times 10}$$

$$(1+i) = \frac{6 \pm \sqrt{36+240}}{20} = \frac{6 \pm \sqrt{276}}{20}$$

$$(1+i) = \frac{6 \pm 16{,}61325}{20}$$

$$(1+i)_1 = \frac{22{,}61325}{20} = 1{,}1307$$

$$(1+i)_2 = \frac{-10,6132}{20} = -0,5307$$

$$(1+i)_1 = 1,1307$$
$$(1+i)_2 = -0,5307$$

Agora que encontramos as duas raízes, é possível isolar i, conforme se segue. Vale salientar, porém, que só um dos resultados será válido, devendo o outro ser desconsiderado. Mas, como saber qual é o valor correto?

Uma das formas é verificar cada uma das taxas encontradas para calcular o VPL. A taxa que der o VPL igual a zero será a correta.

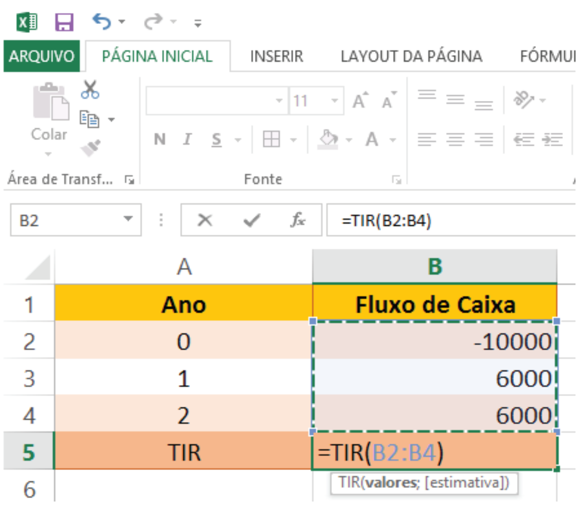
Outra forma é analisando logicamente, para desconsiderar o valor absurdo, como no caso que acabamos de calcular, em que as taxas encontradas foram 13,07% e –153,07% ao ano.

Logicamente, devemos ignorar a taxa –153,07%, uma vez que, ao ser negativa, significa prejuízo e o máximo de prejuízo que podemos ter é de 100% (ou seja todo o capital aplicado) e, por isso, a dispensaremos e consideraremos como a TIR a taxa de 13,07% ao ano.

$(1+i)_1 = 1,1307$	$(1+i)_2 = -0,5307$
$1+i = 1,1307$ $i = 1,1307 - 1$ $i = 0,1307$ $i = 0,1307 \times 100 = 13,07\%$	$1+i = -0,5307$ $i = -0,5307 - 1$ $i = -1,5307$ $i = -1,5307 \times 100 = -153,07\%$

8.3.1 Cálculo da TIR utilizando o Excel

O uso de uma planilha do Excel pode tornar este cálculo da taxa interna de retorno muito mais simples, como mostra a figura abaixo, bastando para isso seguir alguns procedimentos:



Passos:

I. O primeiro passo consiste em organizar os dados em duas colunas, sendo a primeira (A2:A4) os períodos e a segunda (B2:B4) os fluxos de caixa correspondentes a cada período.

II. Observe que o fluxo de caixa do ano 0 (zero) é negativo. Isso ocorre porque representa uma saída de caixa (investimento inicial).

III. Por fim, calcularemos o valor da TIR na célula B5, por meio da fórmula =TIR(B2:B4), em que B2:B4 representa o conjunto de dados analisado.

Resumo

Nesta aula, estudamos que projeto de investimento consiste em qualquer negócio que terá um investimento de recursos no intuito de se obterem lucros futuramente, tais como abrir uma empresa ou até mesmo um pequeno negócio.

O valor de um projeto de investimentos é baseado em sua capacidade de gerar fluxos de caixa futuros, ou seja, de gerar renda econômica, quando comparadas na mesma data.

Entre os principais métodos que o gestor pode levar em conta para a tomada de decisão, destacamos a taxa interna de retorno (TIR) e o valor presente líquido (VPL).

O objetivo do VPL é encontrar alternativas de investimento que rendam mais, para os patrocinadores, do que custam. O processo por meio do qual os fluxos de caixa são ajustados a esses fatores chama-se descontos.

Pelo processo de desconto os fluxos de caixa futuros são convertidos em valores presentes, pois, como vimos na primeira aula, fluxos de épocas diferentes não podem ser comparados nem agregados enquanto não forem convertidos para valores de uma mesma época.

Verificamos que a equação do VPL é representada por:

$$VPL = \left[\frac{FC_1}{(1+i)^1} + \frac{FC_2}{(1+i)^2} + \frac{FC_3}{(1+i)^3} + \ldots \frac{FC_n}{(1+i)^n} \right] - FC_0$$

Na equação, o valor do investimento inicial (FC0) não sofre desvalorização de uma taxa de juros, pois está na data zero e tem sinal negativo por representar uma saída de caixa. Cada fluxo de caixa esperado, como retorno do investimento (FC), será descontado isoladamente até a data zero, por um número de períodos equivalente à distância de tempo que se encontra da data atual.

Desse modo, o resultado do VPL de um investimento representa, em valores monetários (R$), o ganho que excede o rendimento obtido com o custo de capital, que pode ser também denominado de taxa mínima de atratividade (TMA). Pode também ter resultado negativo, o que mostra que o projeto terá retorno menor que o custo do capital.

A taxa interna de retorno (TIR) é a taxa de remuneração que se obtém sobre determinado fluxo de caixa. A TIR é a taxa de juros que iguala, em determinado tempo, o valor presente das entradas (recebimentos) com a das saídas (pagamento) previstos de caixa.

Como vimos com a técnica do VPL, quando um fluxo de caixa apresenta VPL positivo, significa que o investimento está remunerado mais do que o custo do capital utilizado no cálculo. Por outro lado, se o VPL for negativo, isso quer dizer que o investimento está rendendo menos do que o custo do capital.

Mostramos ainda que, matematicamente, a TIR é uma taxa hipotética que anula o VPL, ou seja, é aquele valor de i que satisfaz a seguinte equação:

$$TIR \Rightarrow FC_0 = \frac{FC_1}{(1+i)^1} + \frac{FC_2}{(1+i)^2} + \frac{FC_3}{(1+i)^3} + \ldots \frac{FC_n}{(1+i)^n}$$

Atividade de aprendizagem

2. Um apartamento é colocado à venda por R$ 200.000, à vista, ou em três prestações mensais, nos seguintes valores: a primeira de R$ 100.000 e mais duas de R$ 55.000. Determine o custo mensal da operação, expresso pela taxa interna de retorno.

Chegamos ao final da oitava aula sobre Matemática Financeira. Seu tema foi análise de investimentos por meio dos modelos de valor presente líquido e taxa interna de retorno

Continue estudando e até a próxima aula em que estudaremos índices inflacionários

Aula 9. Índices inflacionários

Objetivos:

- compreender o significado de inflação e seu impacto no consumo;
- aplicar a correção inflacionária de um valor;
- calcular a inflação média e acumulada de um período; e
- determinar a taxa de desvalorização da moeda.

Prezado(a) estudante,

Esta é a nossa nona aula da disciplina Matemática Financeira e o assunto a ser tratado serão os índices inflacionários. Acreditamos que este conteúdo contribuirá para sua qualificação auxiliando no desempenho das suas atividades profissionais

9.1. Conceitos e índices

Mas, você com certeza deve estar-se perguntando o que é inflação. Não é? Então vamos entender o que é inflação, afinal!

Observe uma definição extraída da Revista Veja:

> é um processo de elevação de preços que ocorre sempre que há procura maior do que a capacidade de uma economia produzir determinado bem ou serviço. Em resumo, a inflação pode ser de oferta – quando há escassez de produto – ou demanda – quando a procura é maior do que a quantidade ofertada. Disponível em: < http://veja.abril.com.br/perguntas-respostas/inflacao.shtml> Acesso em: 23 nov. 2013.

No Brasil, atualmente há uma tendência de crescimento inflacionário e tal tendência é consequência do aquecimento econômico que deixou pessoas com mais poder aquisitivo, o que expandiu o consumo.

Vamos entender melhor o que é inflação

De acordo com de Pereira Neto (2011 p. 20), “a inflação corresponde a um aumento generalizado do nível dos preços praticados em uma determinada economia, traduzindo-se assim em uma queda no poder de compra dos envolvidos neste ambiente”. Talvez você se esteja perguntando como este efeito pode ser percebido por nós consumidores, não é mesmo?! A resposta a esta questão é fácil de entender, a partir de um exemplo prático. Imagine que você receba um salário mínimo e consiga realizar toda a compra de alimentos necessários para a sua família se alimentar por um mês. Agora, vamos admitir que durante o mês houve um aumento dos preços de todos os alimentos. Neste caso, no mês seguinte você conseguirá comprar a mesma quantidade de alimentos com o mesmo salário? A resposta é não!

Pois bem, isso significa que o seu poder de compra caiu e por isso não consegue realizar a mesma compra que realizava antes.

Como a inflação é sentida pela população?

Ainda utilizando o texto publicado na Revista Veja citada acima, “a inflação não é sentida de forma homogênea pelas famílias. Seu impacto depende muito do que cada uma consome, onde mora, qual a sua renda mensal, entre outros fatores”.

E como é identificada esta diferença?

Para identificar a inflação entre os diferentes grupos de família, os institutos de pesquisa desenvolveram diversos índices de preço para atender as características de cada segmento.

O que são índices de inflação?

Os índices de inflação consistem em indicadores utilizados para mensurar a variação de preços de um determinado conjunto de bens e serviços em determinada periodicidade. Se observarmos bem o contexto econômico de um país como o Brasil, é possível perceber que há diversos segmentos de bens e serviços, tais como construção civil, alimentos, agropecuária, produtos industrializados. Além disso, as pessoas têm diferentes perfis de renda familiar.

É justamente por isso que são utilizados vários índices, pois um único índice não seria capaz de medir a inflação de todos os segmentos.

Quais são os principais índices de inflação utilizados no Brasil?

No Brasil, não há um sistema oficial único de mensuração da inflação. Sendo assim, há vários índices e instituições que cuidam deles, tais como o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo – IPCA; o Índice Nacional de Preços ao Consumidor – INPC; e o Índice Geral de Preços do Mercado, que são os mais utilizados. O IPCA e o INPC são mantidos pelo IBGE, enquanto o IGP-M é mantido pela Fundação Getúlio Vargas.

De acordo com o IBGE :

> a população-objetivo do **INPC** abrange as famílias com rendimentos mensais compreendidos entre 1 (hum) e 5 (cinco) salários-mínimos, cujo chefe é assalariado em sua ocupação principal e residente nas áreas urbanas das regiões; a do **IPCA** abrange as famílias com rendimentos mensais compreendidos entre 1 (hum) e 40 (quarenta) salários-mínimos, qualquer que seja a fonte de rendimentos, e residentes nas áreas urbanas das regiões. Disponível em: < http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/precos/inpc_ipca/defaultinpc.shtm> Acesso em: 23. nov. 2013.

O IGP-M, segundo a Fundação Getulio Vargas:

> tem como base metodológica a estrutura do Índice Geral de Preços - Disponibilidade Interna (IGP-DI), resultando da média ponderada de três índices de preços: o Índice de Preços por Atacado (IPA-M), o Índice de Preços ao Consumidor (IPC-M) e o Índice Nacional de Custo da Construção (INCC-M). Disponível em: < http://portalibre.fgv.br/main.jsp?lumPageId=402880811D8E34B9011D9CCC6A177934&contentId=40288081229A67AB0122A292DDEA7C18> Acesso em: 23 nov. 2013.

9.2 Cálculo de inflação média e acumulada

O efeito da inflação sobre o valor de um bem possui um comportamento relacionado aos juros compostos. Lembra-se de que os juros compostos têm a característica de incidir sobre o valor ajustado no período anterior (efeito juros sobre juros), gerando um comportamento gráfico exponencial? Na inflação, ocorre de forma muito semelhante.

Por exemplo, imagine que o gasto com alimentação de uma determinada família fosse de R$ 400,00 em dezembro de 2012. Como a alimentação sofreu um reajuste equivalente à inflação medida pelo Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo – IPCA e considerando os índices mensais de inflação na tabela a seguir, é possível saber de quanto a família necessitará para alimentação nos meses seguintes, conforme mostraremos o cálculo para os primeiros três meses de 2013.

	JAN	FEV	MAR
2013	0,86%	0,6%	0,47%

Fonte: http://www.portalbrasil.net/ipca.htm

Mês	Cálculo Valor anterior x (1 + inflação)	Valor ajustado pela inflação
Jan/2013	400 x (1 + 0,0086) = 400 x 1,0086 =	403,44
Fev/2013	403,44 x (1 + 0,006) = 403,44 x 1,006 =	405,86
Mar/2013	405,86 x (1 + 0,0047) = 405,86 x 1,0047 =	407,77

Se a família, em dezembro de 2012, necessitava de R$ 400,00 por mês para alimentação, em março de 2013 este orçamento teve de ser mudado para R$ 407,77. O motivo desse reajuste foi o aumento inflacionário, mas como determinar o aumento inflacionário em termos percentuais? Existem, duas formas para isso, como mostraremos a seguir:

Umas das formas de se descobrir o percentual de inflação no período é dividindo o valor final pelo inicial e depois subtrair 1, conforme se segue:

$$I = \frac{407,77}{400} - 1$$

$$I = 1,01942 - 1 = 0,01942$$

A inflação encontrada está em taxa unitária. Logo, para transformá-la em taxa percentual, é necessário multiplicá-la por 100.

$$I = 0,01942 \times 100 = 1,942\%$$

Portanto, o índice de inflação acumulada no 1° trimestre de 2013 foi de 1,942%.

Mas, se não tivermos o valor final, como saber qual foi a inflação acumulada? É justamente nesse sentido que a segunda forma pode-nos ajudar e muito, como veremos.

Usaremos a seguinte definição:

$$I_n = [(1+I_1)\times(1+I_2)\times(1+I_3)\times\ldots(1+I_n)]-1$$

Na equação acima, I_n representa a inflação acumulada, que é obtida por meio da multiplicação dos termos (1 + I), em que I é a inflação de cada período e termos unitários, subtraído 1.

Exemplificaremos, com o cálculo da inflação acumulada no primeiro trimestre de 2013.

$$I_{tri}=[(1+0,0086)\times(1+0,006)\times(1+0,0047)]-1$$
$$I_{tri}=[(1,0086)\times(1,006)\times(1,0047)]-1$$
$$I_{tri}=[1,01942]-1=0,01942$$
$$I_{tri}=0,01942\times100=1,942\%$$

Como você deve ter percebido, chegamos ao mesmo resultado.

Mas, e se quisermos se quisermos descobrir qual foi a inflação média mensal do período?

Para encontrar a inflação média mensal usaremos um conceito já visto em taxas equivalente, na aula 4.

Se tomarmos o caso acima como exemplo, faremos do seguinte modo

$$\text{Taxa Equivalente Mensal } (I) = \sqrt[\text{Nº períodos}]{1 + \text{TaxaAcumulada}}$$

$$I_{Mensal} = \sqrt[3]{1 + 0{,}01942} - 1$$

$$I_{Mensal} = \sqrt[3]{1{,}01942} - 1$$

$$I_{Mensal} = 1{,}00642 - 1 = 0{,}00642$$

$$I_{Mensal} = 0{,}00642 \times 100 = 0{,}642\%$$

A taxa de inflação média mensal do IPCA no 1° trimestre de 2013 foi, portanto, de 0,642%.

9.3 Taxa de desvalorização da moeda

Você já observou que, toda vez que os noticiários falam de aumento de inflação, é comum mostrarem o aumento de preços e ainda que o salário mínimo já não tem o mesmo poder de compra?

A isso chamamos de taxa de desvalorização da moeda, que, segundo Assaf Neto (2006, p. 64), "enquanto a inflação representa uma elevação nos níveis de preços, a taxa de desvalorização da moeda (TDM) mede a queda no poder de compra da moeda causada por estes aumentos de preços."

É fácil compreender este conceito se analisarmos que, no início do Plano Real, no ano de 1994, o pão francês custava em média R$ 0,08, o que significava que com R$ 1,00 se compravam 12 pães, em média. No ano de 2013, R$ 1,00 não compra dois pães. Isso significa que houve uma desvalorização da moeda.

Mas, como calculamos a taxa de desvalorização da moeda (TDM)? Para calcular a TDM, utilizamos a equação seguinte:

$$TDM = \frac{I}{1 + I}$$

sendo que I é a taxa (unitária) de inflação do período.

Por exemplo, se a inflação de um ano alcançar 7%, a queda na capacidade de compra será de 6,5421%, conforme cálculo a seguir:

$$TDM = \frac{I}{1+I}$$

$$TDM = \frac{0,07}{1+0,07} = \frac{0,07}{1,07} = 0,0654$$

$$TDM = 0,065421 \times 100 = 6,54\%$$

Isso significa uma perda no poder de compra de 6,54%. Em outras palavras, o consumidor só pode consumir 93,46% (100% – 6,54% = 93,46%) do que consumia antes.

Com este conceito, podemos ainda calcular o aumento real de um salário conforme mostraremos.

Como exemplo, podemos analisar o salário mínimo que foi reajustado em janeiro de 2013 para o valor de R$ 678,00 e o salário aprovado para janeiro de 2014 é de R$ 722,00. Se a inflação acumulada no ano de 2013 for de 6%, analisemos as seguintes situações:

a) Qual seria a perda salarial se o salário não fosse reajustado?

A perda salarial poderia ser neste caso encontrada pelo cálculo da TDM,

$$TDM = \frac{I}{1+I}$$

$$TDM = \frac{0,06}{1+0,06} = \frac{0,06}{1,06} = 0,0566$$

$$TDM = 0,0566 \times 100 = 5,66\%$$

b) Com o reajuste do salário para R$ 722,00, qual foi o ganho real?

Para encontrar o ganho real, precisamos primeiro corrigir o salário de 2013 pelo índice de inflação.

Salário corrigido = 678 × (1 + Inflação)

Salário corrigido = 678 × (1 + 0,06)

Salário corrigido = 678 × 1,06=718,68

Como se verifica, o salário mínimo de 2013 após correção pelo índice de inflação de 6% seria igual a R$ 718,68. Agora, para saber qual foi o ganho real, dividiremos o salário de 2014 pelo salário de 2013, já corrigido, e em seguida subtrairemos 1.

$$\text{Ganho real}=\frac{722}{718,68}-1=1,004462-1$$

$$\text{Ganho real}=0,00462\times 100=0,462\%$$

Isso significa que, com a inflação de 6% no ano de 2013, o salário mínimo terá um aumento real de 0,462%

Resumo

Nesta aula, você pôde verificar que a inflação é um processo de elevação de preços que ocorre sempre que há procura maior do que a capacidade de uma economia produzir determinado bem ou serviço. E que a inflação pode ser de oferta – quando há escassez de produto – ou demanda – quando a procura é maior do que a quantidade ofertada.

A inflação não é sentida de forma homogênea pelas famílias. Seu impacto depende muito do que cada uma consome, onde mora, qual a sua renda mensal, entre outros fatores.

Para identificar a inflação para os diferentes grupos de família, os institutos de pesquisa desenvolveram diversos índices de preço para atender as características de cada segmento. Mostramos que um índice de inflação é um indicador que mede a evolução dos preços de um agregado de bens e serviços num determinado período de tempo. Os principais são: o IPCA, medido pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), e o IGP-M, calculado pela Fundação Getúlio Vargas (FGV).

Por fim, estudamos o cálculo da inflação média e acumulada e tratamos da taxa de desvalorização da moeda.

Atividades de aprendizagem

1. Com base nos dados abaixo, calcule a inflação acumulada e a inflação média de abril a julho de 2013 pelo IPCA.

	ABR	MAI	JUN	JUL
2013	0,55%	0,37%	0,26%	0,03%

Fonte: http://www.portalbrasil.net/ipca.htm

2. Se em determinado período a inflação foi de 8%, não havendo reajuste salarial, qual foi a perda do poder de compra?

Caro(a) estudante,

Chegamos ao final da nona aula sobre Matemática Financeira. Nsta aul, diferentemente das anteriores, não tratamos sobre juros ou valoração do dinheiro no tempo e sim da inflação que acarreta desvalorização do capital. Com isso estamos quase chegando ao fim de nossa disciplina. Continue estudando para uma efetiva atuação na área escolhida para se qualificar.

Na próxima aula, exolraremos outro assunto muito importante, que é a depreciação de bens. Até a próxima aula!

Aula 10. Depreciação

Objetivos:

- definir o que é depreciação;
- aplicar os métodos de depreciação linear, da taxa constante e o de capitalização; e
- analisar a utilidade e aplicabilidade da depreciação no ambiente organizacional

Prezado (a) estudante,

Esta é a nossa última aula da disciplina Matemática Financeira. Nesta etapa, você estudará os principais modelos de depreciação. No decorrer da aula, você perceberá o quanto este assunto é importante, pois permite ao gestor financeiro programar a substituição de equipamentos. Veja o quanto você avançou em seu processo de aprendizagem. Mas, precisamos prosseguir com mais este importante tema para a sua formação pessoal e profissional.

10.1 Depreciação

A depreciação, segundo Castanheira (2010, p. 140), é "a desvalorização dos bens da empresa, que perdem valor com o passar do tempo, os quais são denominados de bens depreciáveis."

Mas, o que causa a depreciação?

Entre os principais fatores, destaca-se o envelhecimento de equipamentos, seja pelo uso, ou pelo surgimento de outros mais modernos e eficientes ou pelo avanço tecnológico.

Um exemplo disso são as inovações da informática. Imagine que você tenha um computador em bom estado de conservação e pouco uso, porém este computador foi comprado no ano de 2005 e ainda tem instalado o sistema operacional da Microsoft Windows XP.

Como a Microsoft deixou de fazer manutenção neste sistema operacional, você resolve instalar um sistema operacional mais moderno. Porém, durante a instalação, o técnico identifica que o seu computador, por ser um pouco antigo, não possui memória suficiente para a instalação da versão atual do sistema operacional da Microsoft que é o Windows 8.

Neste caso, você tem duas opções: ou trocar o computador por um mais moderno ou permanecer com o antigo, porém sem atualização.

Outro exemplo é que, se você comprar um carro ou uma moto, verificará que, depois de algum tempo de uso, eles não terão o mesmo valor de um novo.

A essa desvalorização é que chamamos de depreciação.

Um outro aspecto importante é que, se você for vender o seu computador ou veículos usados, ainda conseguirá algum valor por eles, o que é denominado de valor residual. Em alguns casos, porém, esse valor residual é igual a zero.

Antes de investir na aquisição dos bens que constituirão o ativo de uma empresa, é preciso estimar a vida útil desses bens, a fim de determinar o tempo necessário para o investimento ter o retorno desejado.

Castanheira (2010, p.140) afirma que "a depreciação real, definida como a diferença entre o preço de aquisição de um bem antes do uso e o seu valor residual após determinado tempo de uso, é naturalmente difícil de ser calculada e devemos levar em consideração a correção monetária do período em análise."

Já a depreciação teórica é mais fácil de ser calculada, uma vez que nos utilizamos de fórmulas preestabelecidas. Vários são os métodos que nos permitem realizar esse cálculo. Entre eles, destacaremos o método linear, o método da taxa constante e o método de capitalização. Vamos analisar cada um deles.

10.2 Depreciação pelo método linear

O cálculo da depreciação pelo método linear, segundo Castanheira (2010, p.141), "não só é o mais simples como é o [...] utilizado pela Receita Federal para a contabilidade das empresas". De acordo com Castanheira e Serenato (2008, p.120), este método "consiste apenas em dividir o total a depreciar pelo número de períodos de vida útil do bem."

Para o cálculo da depreciação pelo método linear, utilizamos a equação:

$$DL = \frac{C - M}{n}$$

Assim:

DL é o valor da depreciação linear;

C é o valor de compra do bem;

M é o valor residual;

n é a vida útil do bem.

Para ajudar no seu aprendizado, vamos resolver a questão abaixo.

Tomemos como exemplo um equipamento adquirido pela empresa ABC Ltda. pelo valor de R$ 30.000,00, sabendo que a vida útil estimada desse equipamento é de oito anos, após a qual o valor residual será de R$ 6.000,00.

Definição de variáveis:

DL = ?

C = 30000

M = 6000

n = 8 anos

Resolução:

$$DL = \frac{C - M}{n}$$

$$DL = \frac{30000 - 6000}{8}$$

$$DL = \frac{24000}{8}$$

$$DL = 3000$$

Portanto, o equipamento terá uma depreciação anual de R$ 3.000,00.

Para você melhor compreender aplicação deste conhecimento na prática, imagine que, após um ano de uso, a empresa resolvesse vender este equipamento. Por quanto ela deveria vender? Se o equipamento novo foi R$ 30.000,00 e a depreciação anual calculada é de R$ 3.000,00, logo significa que, após um ano de uso, o equipamento deveria ser vendido por R$ 27.000,00 (30.000 – 3.000).

10.3 Depreciação pelo método da taxa constante

Este método tem a característica da taxa utilizada para o cálculo da depreciação de um bem ser uniforme ao longo da sua vida útil. Dessa forma, esse método é denominado de método da taxa constante.

A equação que define a taxa de depreciação neste método é dada por:

$$(1 - i)^n = \frac{M}{C}$$

Assim:

i é a taxa constante

C é o valor de compra do bem

M é o valor residual

n é a vida útil do bem

Porém, podemos transformá-la em duas outras equações específicas para o cálculo da taxa e do tempo de depreciação, como veremos a seguir:

Equação da taxa constante de depreciação:

$$(1-i)^n = \frac{M}{C}$$

$$1-i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}}$$

$-i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1 \times (-1)$, ao multiplicar por (-1), temos

$$\boxed{i = 1 - \sqrt[n]{\frac{M}{C}}}$$

Equação do tempo de depreciação pelo método da taxa constante de depreciação:

Para resolução desta equação, usaremos o conteúdo de logaritmo natural já abordado na aula sobre juros compostos.

$$(1-i)^n = \frac{M}{C}$$

$$ln = (1-i)^n = ln\left(\frac{M}{C}\right)$$

$$n \times ln(1-i) = ln\left(\frac{M}{C}\right)$$

$$n = \frac{ln\left(\frac{M}{C}\right)}{ln(1-i)}$$

$$n = \frac{ln\left(\frac{M}{C}\right)}{ln(1-i)}$$

Assim, para determinarmos a taxa de depreciação pelo método da taxa constante no caso de um equipamento que foi adquirido pela empresa ABC Ltda. pelo valor de R$ 30.000,00, sabendo que a vida útil estimada desse equipamento é de oito anos, após a qual o valor residual será de R$ 6.000,00, fazemos o seguinte cálculo:

Definição das variáveis:

i = ?

C = 30000

M = 6000

n = 8

Resolução:

$$i = 1 - \sqrt[n]{\frac{M}{C}}$$

$$i = 1 - \sqrt[8]{\frac{6000}{30000}}$$

$$i = 1 - \sqrt[8]{0,2}$$
$$i = 1 - 0,817765$$
$$i = 0,182235$$

$i = 0{,}182235 \times 100$
$i = 18{,}2235\%$ ao ano

Portanto, a taxa de depreciação é de 18,2235% ao ano.

No caso anterior, calculamos a taxa constante de depreciação. Neste caso, iremos calcular a vida útil (tempo) da máquina. Vejamos.

Uma máquina foi adquirida por uma empresa por R$ 220.000,00 e vendida, após determinado tempo de uso, por R$ 60.000,00. Considerando que a depreciação foi determinada pelo método da taxa constante e que a taxa utilizada foi de 14,990772% ao ano,como identificar a vida útil desta máquina?

Definição das variáveis:

$i = 14{,}990772\%$ ao ano$= \dfrac{14{,}990772}{100} = 0{,}14990772$

C = 220000

M = 60000

n = ?

Resolução:

$$n = \frac{ln\left(\frac{M}{C}\right)}{ln(1-i)}$$

$$n = \frac{ln\left(\frac{60000}{220000}\right)}{ln(1-0{,}14990772)}$$

$$n = \frac{ln(0{,}272727)}{ln(0{,}850092)}$$

$$n = \frac{-1{,}29928}{-0{,}16241}$$

$$n = 8$$

Isto significa dizer que o tempo de depreciação é de oito anos.

10.4 Depreciação pelo método de capitalização

Para o entendimento desse método, vamos diretamente a um exemplo.

Vamos considerar o caso de uma empresa que adquiriu um veículo novo por R$ 50.000,00 cuja vida útil é de cinco anos.

Após esse tempo, o veículo deverá ser trocado por um novo.

Observe que, durante os cinco anos de vida útil do veículo, a empresa aplicou o valor da depreciação que passou a render juro. Ao final dos cinco anos, os juros somados aos valores aplicados (depreciação total), mais o valor residual, deverão ser suficientes para adquirir um novo veículo, considerando o mesmo valor do veículo anterior. Suponha então que, após a vida útil, o valor residual do veículo é de R$ 20.000,00. Considere uma taxa de mercado de 8% ao ano.

Para fazer o cálculo da depreciação pelo método da capitalização, utilizamos a fórmula:

$$DC = \frac{(C - M) \times i}{(1 + i)^n - 1}$$

Onde:

DC é a depreciação pelo método de capitalização;

C é o valor de compra do bem;

M é o valor residual;

n é a vida útil do bem;

i é a taxa de mercado.

$$DC = \frac{(50000 - 20000) \times 0,08}{(1+0,08)^5 - 1}$$

$$DC = \frac{30000 \times 0,08}{(1,08)^5 - 1}$$

$$DC = \frac{2400}{1,469328 - 1}$$

$$DC = 5113,69$$

Para melhor visualização desse método de depreciação, é conveniente montarmos uma tabela com os principais dados, conforme mostramos a seguir:

n	Juros acumulados	DC + Juros acumulados	Depreciaçãototal	Valorresidual
0	0,00	0,00	0,00	50.000,00
1	0,00	5.113,69 + 0,00 = 5113,69	5.113,69	44.886,31
2	409,10	5.113,69 + 409,10 = 5522,79	10.636,48	39.363,52
3	850,92	5.113,69 + 850,92 = 5964,61	16.601,10	33.398,90
4	1.328,09	5.113,69 + 1328,09 = 6441,78	23.042,88	26.957,12
5	1.843,43	5.113,69 + 1843,43 = 6957,12	30.000,00	20.000,00

Observe que os juros acumulados são calculados aplicando-se 8% sobre a depreciação total do período correspondente. Observe ainda que a depreciação total somada ao valor residual após a vida útil do veículo é igual ao valor do veículo quando novo.

Resumo

Nesta aula, você teve oportunidade de aprender que a depreciação consiste na desvalorização dos bens da empresa, que perdem valor com o passar do tempo, os quais são denominados de bens depreciáveis.

Entre os principais fatores da depreciação destaca-se o envelhecimento de equipamentos, seja pelo uso, ou pelo surgimento de outros mais modernos e eficientes ou avanço tecnológico.

São três os métodos mais utilizados: depreciação linear; depreciação da taxa constante; e depreciação pelo método de capitalização.

O método linear para o cálculo da depreciação é o mais simples, consistindo apenas em dividir o total a depreciar pelo número de períodos de vida útil do bem.

Para o cálculo da depreciação pelo método línear mostramos no conteúdo a equação a ser utilizada.

Já o método da taxa constante tem a característica de a taxa a ser utilizada para o cálculo da depreciação de um bem ser uniforme ao longo da sua vida útil.

A equação que define a taxa de depreciação neste método também foi apresentada no conteúdo da aula

Por fim, demonstramos a fórmula para o cálculo do método da capitalização.

Atividades de aprendizagem

1.Uma máquina foi adquirida por uma empresa por R$55.000,00 e vendida, após determinado tempo de uso, por R$ 10.000,00. Considerando-se uma precipitação linear igual a R$ 9.000,00 ao ano, descubra a vida útil dessa máquina.

2. Um equipamento foi adquirido por uma empresa pelo valor de R$ 56.000,00. Sabendo que a vida útil estimada desse equipamento é de dez anos e que, após esse período, o valor residual será de R$ 10.000,00, determine o valor de depreciação ao ano pelo método linear.

3. Um equipamento foi adquirido por uma empresa pelo valor de R$ 32.000,00. Sabendo que a vida útil estimada desse equipamento é de cinco anos e que, após esse período, o valor residual será de R$ 10.000,00, determine a taxa de depreciação pelo método da taxa constante:

4. Uma máquina foi adquirida por uma empresa pelo valor de R$ 88.000,00 e vendida, após determinado tempo de uso, por R$8.000,00. Considerando-se que a depreciação foi determinada pelo método da taxa constante e que a taxa utilizada foi de 29,004697% ao ano, descubra a vida útil dessa máquina.

5. Um equipamento foi adquirido por uma empresa pelo valor de R$ 66.000,00. Sabendo que a vida útil estimada desse equipamento é de quatro anos e que, após esse período, o valor residual será de R$ 16.000,00 e sabendo que a taxa de mercado é igual a 10% ao ano, calcule a depreciação pelo método da capitalização.

Chegamos ao final de nossa última aula da disciplina de Matemática Financeira, cujo tema foi Depreciação. Além da sua definição, estudamos os vários métodos que permitem efetuar o seu cálculo , assim como sua validade no ambiente organizacional. É a última aula, mas não deixe de realizar as atividades de aprendizagem.

Palavras finais

Prezado(a) estudante,

É com imenso prazer que o parabenizo pelo percurso realizado. Sei que foi um desafio diário que exigiu muita disciplina e determinação, mas o importante é que chegou até aqui. Esse aprendizado permitirá que novas portas sejam abertas a você e lembre-se: esta foi apenas uma parte de um processo de aprendizagem que é contínuo porque há sempre mais para conhecer, pesquisar e se atualizar. As demais disciplinas, as leituras, a troca de experiências, as atividades de aprendizagem no decorrer do curso contribuirão para isso. É possível observar que, com o avanço tecnológico, o ensino na modalidade a distância (EaD) tem crescido e causado uma grande revolução na educação, pois podemos utilizar um maior número de ferramentas inovadoras que proporcionam melhor interação e resultados no processo que leva à aprendizagem e a qualificação profissional.

Como foi sua experiência nesse componente curricular? A Matemática Financeira lhe será de grande proveito, pois tanto no decorrer do curso como quando você começar a atuar na área para a qual se está qualificando estará sempre colocando em prática o conteúdo que acabou de estudar.

O curso continua e você precisa sempre buscar novos conhecimentos, o que lhe proporcionará bons resultados.

Avante, nunca desista!

Guia de Soluções

Atividades de aprendizagem aula 1

1. $= 350 \times \frac{7}{100} = \frac{2450}{100} = 24,50$

2. $= \frac{428527}{334585} - 1 = 1,2808 - 1 = 0,2808 \times (100) = 28,08\%$

3.

$$\frac{760}{700} = \frac{x}{2000}$$

$$760 \times 2000 = 700x$$
$$700x = 1520000$$
$$7x = 15200$$
$$x = \frac{15200}{7} = 2171,43$$

Atividades de aprendizagem aula 2

1. $J = 150 \times 0,02 \times 3$

$J = 3 \times 3$

$J = 9$

2. $i = \frac{45}{300 \times 10}$

$i = \frac{45}{3000} = 0,015$

$i = 0,015 \times 100 = 1,5\%$

3.
$$n = \frac{80}{800 \times 0,02}$$

$$n = \frac{80}{16} = 5$$

4. $F_n = 27000(1 + 0,015 \times 3) = 28215$

5. $i = \dfrac{8000}{40000 \times 10} = \dfrac{8}{400} = 0,02 \times (100) = 2\%$

6. $F_n = 27000(1 + 0,015 \times 3) = 28215$

7.

15/abr	105
	+125
	= 230 (18/Ago)

Atividades de aprendizagem aula 3

1. $F = 2000(1 + 0,1)$

$F = 2000 \times 1,77156 = 3.543,12$

2. $F_n = 8000(1 + 0,025)^{10}$

$F_n = 8000 \times 1,28008 = 10.240,68$

3. $P = \dfrac{12000}{(1 + 0,02)^4} = \dfrac{12000}{1,08243} = 11.086,15$

4. $P = \dfrac{16298,14}{(1 + 0,0235)^{10}} = \dfrac{16298,14}{1,261474} = 12.919,91$

5. $i = \sqrt[10]{\dfrac{1150}{1000}} - 1 = \sqrt[10]{1,15} - 1 = 1,0141 - 1 = 0,0141$

$i = 0,0141 \times (100) = 1,41\%$ ao mês

6. $$i=\sqrt[6]{\frac{34689,1}{30000}}-1=\sqrt[6]{1,156303}-1=1,0245-1=0,0245$$

$$i=0,0245\times(100)=2,45\%\text{ ao mês}$$

7. $$n=\frac{ln\left(\frac{30734,64}{22000}\right)}{ln(1+0,034)}=\frac{ln(1,397029)}{ln(1,034)}=\frac{0,334348}{0,033435}=10\text{ meses}$$

8. $$n=\frac{ln\left(\frac{600}{200}\right)}{ln(1+0,01)}=\frac{ln(3)}{ln(1,01)}=\frac{1,098612}{0,00995}=110,4\text{ meses}$$

Atividades de aprendizagem aula 4

1. $i_m=\sqrt[12]{1+0,3}-1=1,0221-1=0,0221$
$i=0,0221\times(100)=2,21\%$ ao mês

2. $i_a=(1+0,02)^{12}-1=1,2682-1=0,2682$
$i=0,2682\times(100)=26,82\%$ ao ano

3. $i=\frac{0,18}{12}=0,015$ ao mês

i_a=(1+0,015)^{12}-1=1,1956-1=0,1956
i=0,1956 × (100)=19,56% ao ano

4. $i=\frac{0,36}{4}=0,09$ ao trimestre

i_a=(1+0,09)^{4}-1=1,4116-1=0,4116
i=0,4116 × (100)=41,16% ao ano
Fn=35000(1+0,4116)^{2} $=35000\times1,9926=69.741,51$

Atividades de aprendizagem aula 5

1. $i = 36\%$ a.a.(nominal) $= \dfrac{36\%}{12} = 3\%$ a.m=0,03

$$D_r = \frac{N \times i \times n}{1 + i \times n}$$

$$D_r = \frac{5000 \times 0{,}03 \times 3}{1 + 0{,}03 \times 3} = \frac{450}{1{,}09} = 412{,}84$$

2. $$i \times n = \frac{N}{V_r} - 1$$

$$2i = \frac{26000}{24236{,}1} - 1$$

$$2i = 1{,}07278 - 1$$
$$2i = 0{,}07278$$

$$i = \frac{0{,}7278}{2} = 0{,}03639 = 3{,}639\% \text{ ao mês}$$

3. $$V_r = \frac{N}{1 + i \times n}$$

$$V_r = \frac{17000}{1 + 0{,}035 \times 3} = \frac{17000}{1{,}105} = 15384{,}60$$

4. $$D_F = N \times d \times n$$
$$D_F = 5000 \times 0{,}01 \times 3 = 150$$

5.

$$d \times n = \frac{N}{V_F} - 1$$

$$d \times 2 = \frac{35000}{33200} - 1$$

$$d \times 2 = 1{,}05422 - 1$$

$$d = \frac{0{,}05422}{2} = 0{,}02711 = 2{,}711\% \text{ a.m.}$$

6. $V_F = N(1 - d \times n)$

$V_F = 17000(1 - 0{,}035 \times 3)$

$V_F = 17000 \times 0{,}895 = 15.215$

7. $D_F = N \times d \times n$

$D_F = 8000 \times 0{,}03 \times 1 = 240$

$$N = \frac{V_F}{(1 - d \times n)}$$

$$N = \frac{8000}{(1 - 0{,}03 \times 1)} = 7760$$

$$i = \frac{D_r}{V_r \times n}$$

$$i = \frac{240}{7760 \times 1} = 0{,}0309 = 3{,}09\% \text{ a.m.}$$

8. $$V_r = \frac{N}{(1+i)^n}$$

$$V_r = \frac{40000}{(1+0{,}02)^{16}} = \frac{40000}{1{,}372786} = 29137{,}83$$

9. $N = V_r(1+i)^n$

$N = 24658(1+0{,}04)^5$

$N = 24658 \times 1{,}21665 = 30.000{,}23$

Atividades de aprendizagem aula 6

1. $$a_{n\neg i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

$$a_{12\neg 0{,}01} = \frac{(1+0{,}01)^{12} - 1}{0{,}01(1+0{,}01)^{12}} = \frac{0{,}126825}{0{,}011268} = 11{,}25508$$

$P = R \times a_{n\neg i}$

$P = 1000 \times 11{,}25508 = 11.255{,}08$

2. $a_{n\neg i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$

$$a_{10\neg 0,015} = \frac{(1+0,015)^{10} - 1}{0,015(1+0,015)^{10}} = \frac{0,160541}{0,017408} = 9,222185$$

$$P = R \times a_{n\neg i}$$
$$P = 140 \times 9,222185 = 1.291,11$$

3. $a_{n\neg i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$

$$a_{10\neg 0,028} = \frac{(1+0,028)^{10} - 1}{0,028(1+0,028)^{10}} = \frac{0,218048}{0,036905} = 8,6179$$

$$R = \frac{P}{a_{n\neg i}}$$

$$R = \frac{1300}{8,6179} = 150,85$$

4. $a_{n\neg i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$

$$a_{8\neg 0,03} = \frac{(1+0,03)^{8} - 1}{0,03(1+0,03)^{8}} = \frac{0,26677}{0,038003} = 7,01969$$

$$R = \frac{P}{a_{n\neg i}}$$

$$R = \frac{180}{7,01969} = 25,64$$

5. $S_{n\neg i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

$$S_{4\neg 0,1} = \frac{(1+0,1)^4 - 1}{0,1} = \frac{0,4641}{0,1} = 4,641$$

$$S = T \times S_{n\neg i}$$
$$S = 5000 \times 4,641 = 23.205$$

6. $S_{n\neg i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

$$S_{24\neg 0,015} = \frac{(1+0,015)^{24} - 1}{0,015} = \frac{0,429503}{0,015} = 28,63352$$

$$S = T \times S_{n\neg i}$$
$$S = 600 \times 38,63352 = 17.180,11$$

7. $S_{n\neg i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

$$S_{20\neg 0,025} = \frac{(1+0,025)^{20} - 1}{0,025} = \frac{0,638616}{0,025} = 25,54466$$

$$T = \frac{S}{S_{n\neg i}}$$

$$T = \frac{6000}{25,54466} = 300$$

Atividades de aprendizagem aula 7

1. $A = \dfrac{SD_0}{n} = \dfrac{150000}{180} = 833,33$

$$SD_n = SD_0 - (n \times A)$$
$$SD_{30} = 150000 - (30 \times 833,33)$$
$$SD_{30} - 150000 - 25000 = 125000$$

2. $P_n = A + (SD_0 - (n-1) \times A) \times i$

$P_n = 833,33 + (150000 - (30-1) \times 833,33) \times 0,005$

$P_n = 833,33 + (150000 - 24166,67) \times 0,005$

$P_n = 833,33 + 125833,3 \times 0,005$

$P_n = 833,33 + 629,1667 = 1462,50$

3.

N	SDn = SDn – 1 - A	A = SD0 / n	J = SDn – 1 x i	P = A - J
0	300			
1	R$ 200,00	R$ 100,00	6,00	R$ 106,00
2	R$ 100,00	R$ 100,00	4,00	R$ 104,00
3	R$ 0,00	R$ 100,00	2,00	R$ 102,00
Total		R$ 300,00	R$ 12,00	R$ 312,00

3)N	SDn = SDn – 1 - A	A = P - J	J = SDn – 1 x i	P
0	900			
1	727,06	172,94	18,00	190,94
2	550,66	176,40	14,54	190,94
3	370,73	179,93	11,01	190,94
4	187,20	183,53	7,41	190,94
5	- 0,00	187,20	3,74	190,94
Total		900,00	54,71	954,71

Atividades de aprendizagem aula 8

1. $VPL = \left[\frac{2000}{(1+0,18)^1} + \frac{3500}{(1+0,18)^2} + \frac{2500}{(1+0,18)^3} + \frac{2000}{(1+0,18)^4}\right] - 500$

$$VPL = \left[\frac{2000}{(1,18)^1} + \frac{3500}{(1,18)^2} + \frac{2500}{(1,18)^3} + \frac{2000}{(1,18)^4}\right] - 500$$

$$VPL = \left[\frac{2000}{1,18} + \frac{3500}{(1,18)^2} + \frac{2500}{(1,18)^3} + \frac{2000}{(1,18)^4}\right] - 500$$

$$VPL = \left[\frac{2000}{1,18} + \frac{3500}{1,3924} + \frac{2500}{1,64303} + \frac{2000}{1,93878}\right] - 500$$

$VPL = [1694,92 + 2513,65 + 1521,58 + 1031,58] - 500$

$VPL = 6761,27 - 500 = 1761,72$

O valor do VPL encontrado é maior que zero, o que significa que o investimento é viável.

2.

Mês	Valor
0	-200000
1	100000
2	55000
3	55000
TIR	2,78%

Atividades de aprendizagem aula 9

1. Inflação Acumulada Quadrimestral:

$$I_n = [(1+I_1)\times(1+I_2)\times(1+I_3)\times\ldots(1+I_n)]-1$$
$$I_4 = [(1+0,0055)\times(1+0,0037)\times(1+0,0026)\times(1+0,0003)]-1$$
$$I_4 = [(1,0055)\times(1,0037)\times(1,0026)\times(1,0003)]-1$$
$$I_4 = [1,012148]-1 = 0,012148$$
$$I_4 = 0,012148\times 100 = 1,21\%$$

Inflação Média Mensal:

$$\text{Taxa Equivalente Mensal (I)} = \sqrt[\text{Nº períodos}]{1+\text{Taxa Acumulada}}-1$$

$$\text{I}=\sqrt[4]{1+0,012148}-1$$
$$\text{I}=\sqrt[4]{1,012148}-1$$
$$\text{I}=1,003023-1=0,003023$$
$$I = 0,003023\times 100 = 0,3\%$$

2. $TDM = \dfrac{I}{1+I}$

$$TDM = \frac{0,08}{1+0,08} = \frac{0,08}{1,08} = 0,074074$$

$$TDM = 0,074074\times 100 = 7,4074\%$$

Atividades de aprendizagem aula 10

1. $DL = \dfrac{C - M}{n}$

$$9000 = \frac{55000 - 10000}{n}$$

$$9000 = \frac{45000}{n}$$

$$n = \frac{45000}{9000} = 5$$

A vida útil da máquina é de 5 anos.

2. $DL = \dfrac{C - M}{n}$

$$DL = \frac{56000 - 10000}{10} = \frac{46000}{10} = 4600$$

3.

$$i = 1 - \sqrt[n]{\frac{M}{C}}$$

$$i = 1 - \sqrt[5]{\frac{10000}{32000}}$$

$$i = 1 - \sqrt[10]{0,3125}$$
$$i = 1 - 0,792447 = 0,2075$$
$$i = 0,2075 \times 100 = 20,75\% \text{ ao ano}$$

4.

$$n = \frac{ln\left(\frac{M}{C}\right)}{ln(1-i)}$$

$$n = \frac{ln\left(\frac{8000}{88000}\right)}{ln(1-0,29004697)}$$

$$n = \frac{ln(0,09090909)}{ln(0,70995303)} = \frac{-2,397985}{-0,342556} = 7 \text{ anos}$$

5.

$$DC = \frac{(C - M) \times i}{(1+i)^n - 1}$$

$$DC = \frac{(66000 - 16000) \times 0,1}{(1+0,1)^4 - 1}$$

$$DC = \frac{50000 \times 0,1}{(1,1)^4 - 1} = \frac{5000}{1,4641 - 1} = \frac{5000}{0,4641} = 10.773,54$$

Referências

ASSAF NETO, Alexandre. **Matemática Financeira e Suas Aplicações.** 9 ed. rev. Atlas: São Paulo, 2006.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Descrição da taxa SELIC**. Disponível em: <http://www.bcb.gov.br/htms/selic/selicdescricao.asp> Acesso em: 23 jan. 2014.

BRASIL. **Decreto-lei nº 2.394, de 21.12.1987**. Altera a legislação do Imposto de renda incidentes sobre rendimentos auferidos em operações financeiras de curto prazo e dá outras providências. Disponível em: < http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto-lei/del2394.htm> Acesso em 12 set. 2013.

CAFEO, Reinaldo Cesar, 2011. **Estimativa do custo médio ponderado em produtos agrícolas**. – Botucatu: [s.n.], 2011. Disponível em: < http://www.pg.fca.unesp.br/Teses/PDFs/Arq0645.pdf> Acesso em: 12 set. 2013.

. CASTANHEIRA, Nelson Pereira; MACEDO, Luiz Roberto Dias de. **Matemática financeira aplicada**. 3. ed. rev. Curitiba: IBPEX, 2010.

CASTANHEIRA, Nelson Pereira; SERENATO, Verginia S. **Matemática financeira e análise financeira aplicada:** para todos os níveis. Curitiba: Juruá, 2008.

COMISSÃO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR. **Logaritmo e Exponencial**. Disponível em: < http://www.ilea.ufrgs.br/radioisotopos/Logaritmo%20e%20Exponencial.pdf> Acesso em: 15 set. 2013.

CONSELHO FEDERAL DE CONTABILIDADE. Resoluções e Ementas do CFC. Resolução CFC nº 1.296 de 17.09.2010. Demonstração dos Fluxos de Caixa Disponível em: <http://www2.cfc.org.br/sisweb/sre/detalhes_sre.aspx?Codigo=2010/001296. Acesso em: 23 set. 2013.

CRESPO, Antônio Arnot. **Matemática comercial e financeira fácil.** 13. ed. São Paulo: Saraiva, 2002.

DICIONÁRIO DO AURELIO. Significado de juro. Disponível em: <http://www.dicionariodoaurelio.com/Juro.html> Acesso em: 10 nov. 2013.

FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS. Metodologias e Notas Técnicas. Metodologia IGP-M. Disponível em: <http://portalibre.fgv.br/main.jsp?lumPageId=402880811D8E34B9011D9CCC6A177934&contentId=40288081229A67A> Acesso em: 23 nov. 2013

GIMENES, Cristiano Marchi. **Matemática Financeira**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

IBGE. Sistema nacional de Índices de Preços ao Consumidor. Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo - IPCA e Índice Nacional de Preços ao Consumidor – INPC. Disponível em: < http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/precos/inpc_ipca/defaultinpc.

shtm> Acesso em: 23 nov. 2013.

JACQUES, Ian. **Matemática para economia e administração**. Tradução Regina Célia Simille de Macedo; revisão técnica Luiz Dusilo. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

MICHAELIS. Dicionário de Português online. **Razão**. Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/definicao/razao%20_1033352.htm> Acesso em: 23 jan. 2014.

PASSANEZI, Paula Meyer Soares. **O valor do amanhã:** ensaio sobre a natureza dos juros. Rev. econ. contemp. [online]. 2008, vol.12, n.1, p. 179-181.

PEREIRA NETO, Danyella Moira. **Taxa de juros e controle de inflação:** a defasagem de tempo entre as duas variáveis. [monografia]. Brasília: UNB, 2011. Disponível em:

<http://bdm.bce.unb.br/bitstream/10483/1666/1/2011_DanyellaMouraPereiraNeto.pdf> Acesso em: 10 out. 2013.

PORTAL BRASIL. Economia e Emprego. Investidor pode antecipar resgate em Certificado de Depósito Bancário (CDB) sem prejuízo. Disponível em: <http://www.brasil.gov.br/sobre/economia/investimentos/cdb-certificado-de-deposito-bancario>. Acesso em: 10 nov. 2013.

PUCCINI, Abelardo de Lima. **Matemática financeira objetiva e aplicada.** 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2003.

SAMANEZ, Carlos Patricio. **Matemática financeira**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

SANDRINI, Jackson Ciro. **Sistemas de amortização de empréstimos e a capitalização de juros: análise dos impactos financeiros e patrimoniais**. [dissertação]. Curitiba: UFPR, 2007.

SÓ MATEMÁTICA. **Matemática Financeira**. Conceitos Básicos. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/emedio/finan.php > Acesso em: 10 nov. 2013.

VEJA.COM. **Perguntas e Respostas. Inflação**. Disponível em: http://veja.abril.com.br/perguntas-respostas/inflacao-impressao.shtml > Acesso em: 23 nov. 2013.

WAKAMATSU. André. **Matemática financeira**. São Paulo: Pearson, 2012.

WIKIPÉDIA .Enciclopédia Livre. **Porcentagem**. Disponível em: < <http://pt.wikipedia.org/wiki/Porcentagem>Acesso em: 13 jan. 2013.

Obras Consultadas

CASTANHEIRA, Nelson. **HP-12c:** Com utilizá-la com facilidade. Curitiba: IBEPEX, 2010

CAMARGO, Camila. **Análise de investimentos e demonstrativos financeiros**. Curitiba: Ibpex, 2007.

FERREIRA, José Antonio Stark. **Finanças corporativas:** conceitos e aplicações. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2005.

MACEDO, Luiz Roberto Dias de. **Tópicos de matemática aplicada**. Curitiba: Ibpex, 2006.

RYBA, Andréa. **Elementos de engenharia econômica**. Curitiba: Ibpex, 2011.

Bibliografia básica

CRESPO, Antônio Arnot. **Matemática comercial e financeira fácil**. 13. ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

VERAS, Lilia Ladeira. **Matemática Financeira.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2001.

VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. **Matemática Financeira**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

Currículo do Professor-autor

Vilmar dos Santos Alves é graduado em Licenciatura Plena em Matemática e mestre em Administração pela Universidade Federal de Rondônia. É pós-graduado em MBA em Finanças, Controladoria e Auditoria pela Faculdade São Lucas. Atualmente, ocupa a função de coordenador de filial na Gerência de Desenvolvimento Urbano e Rural Porto Velho da Caixa Econômica Federal. É professor pela Faculdade de Ciências Administrativas e de Tecnologia - Fatec-RO, pela Faculdade Interamericana de Porto Velho – Uniron. Atua também como professor conteudista e formador do Curso Técnico em Finanças na Modalidade a Distância, do Instituto Federal do Rondônia - IFRO.