Matemática Básica

Luís Américo Monteiro Junior

UFMT

Cuiabá - MT

2015

Presidência da República Federativa do Brasil
Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Diretoria de Integração das Redes de Educação Profissional e Tecnológica

Equipe de Revisão

Universidade Federal de Mato Grosso – UFMT

Coordenação Institucional
Carlos Rinaldi

Coordenação de Produção de Material Didático Impresso
Pedro Roberto Piloni

Designer Educacional
Marta Magnusson Solyszko

Designer Master
Daniela Mendes

Diagramação
Tatiane Hirata

Revisão de Língua Portuguesa
Marcy Monteiro Neto

Revisão Científica
Neusa Blasques

Instituto Federal de São Paulo- Campus Caraguatatuba

Diretor do IFSP
Adriano Aurélio Ribeiro Barbosa

Diretora Geral do e-Tec
Yara Maria Guiso de Andrade Facchini

Coordenadora Geral do e-Tec
Elizabeth Gouveia da Silva Vanni

Coordenadora do Curso
Maria Dulce Monteiro Alves

Projeto Gráfico
Rede e-Tec Brasil/UFMT

Apresentação Rede e-Tec Brasil

Prezado(a) estudante,

Bem-vindo(a) à Rede e-Tec Brasil!

Você faz parte de uma rede nacional de ensino, que por sua vez constitui uma das ações do Pronatec - Programa Nacional de Acesso ao Ensino Técnico e Emprego. O Pronatec, instituído pela Lei nº 12.513/2011, tem como objetivo principal expandir, interiorizar e democratizar a oferta de cursos de Educação Profissional e Tecnológica (EPT) para a população brasileira, propiciando caminho de acesso mais rápido ao emprego.

É neste âmbito que as ações da Rede e-Tec Brasil promovem a parceria entre a Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica (Setec) e as instâncias promotoras de ensino técnico como os institutos federais, as secretarias de educação dos estados, as universidades, as escolas e colégios tecnológicos e o Sistema S.

A educação a distância no nosso país, de dimensões continentais e grande diversidade regional e cultural, longe de distanciar, aproxima as pessoas ao garantir acesso à educação de qualidade e ao promover o fortalecimento da formação de jovens moradores de regiões distantes, geograficamente ou economicamente, dos grandes centros.

A Rede e-Tec Brasil leva diversos cursos técnicos a todas as regiões do país, incentivando os estudantes a concluir o ensino médio e a realizar uma formação e atualização contínuas. Os cursos são ofertados pelas instituições de educação profissional e o atendimento ao estudante é realizado tanto nas sedes das instituições quanto em suas unidades remotas, os polos.

Os parceiros da Rede e-Tec Brasil acreditam em uma educação profissional qualificada – integradora do ensino médio e da educação técnica - capaz de promover o cidadão com capacidades para produzir, mas também com autonomia diante das diferentes dimensões da realidade: cultural, social, familiar, esportiva, política e ética.

Nós acreditamos em você!
Desejamos sucesso na sua formação profissional!

Ministério da Educação
Agosto de 2015

Nosso contato
etecbrasil@mec.gov.br

Indicação de Ícones

Os ícones são elementos gráficos utilizados para ampliar as formas de linguagem e facilitar a organização e a leitura hipertextual.

Atenção: indica pontos de maior relevância no texto.

Saiba mais: oferece novas informações que enriquecem o assunto ou "curiosidades" e notícias recentes relacionadas ao tema estudado.

A-Z

Glossário: indica a definição de um termo, palavra ou expressão utilizada no texto.

Mídias integradas: remete o tema para outras fontes: livros, filmes, músicas, *sites*, programas de TV.

Atividades de aprendizagem: apresenta atividades em diferentes níveis de aprendizagem para que o estudante possa realizá-las e conferir o seu domínio do tema estudado.

Reflita: momento de uma pausa na leitura para refletir/escrever sobre pontos importantes e/ou questionamentos.

Palavra do Professor-autor

Prezado (a) estudante,

Ao elaborar este material didático procurei selecionar os assuntos básicos da matemática que pudessem aprimorar o seu raciocínio e servir de subsídios para o prosseguimento de seus estudos durante o Curso Técnico em Administração, usando uma forma simples para apresentar os conteúdos e, sempre que possível, uma aplicação prática da teoria desenvolvida.

Este caderno é um ponto de partida para seus estudos. Você pode e deve procurar aprofundar seus estudos consultando outras fontes de conhecimento (livros, artigos, revistas, internet, etc.).

Ao final de cada aula você encontrará uma série de exercícios (atividades de aprendizagem). É importante que você resolva todos os exercícios propostos.

Lembre-se que a chave para o sucesso está em seus estudos e na sua dedicação.

Apresentação da Disciplina

A Matemática está presente em várias áreas do conhecimento. Na Administração, os conceitos matemáticos são de suma importância no processo de tomada de decisão do administrador. Os conteúdos tratados nas aulas fornecem uma base muito importante de conceitos matemáticos que vão auxiliar no desenvolvimento do curso.

Esta disciplina é um apoio para as demais disciplinas do curso que necessitam de algum cálculo. Como, por exemplo, matemática financeira, estatística e contabilidade.

A carga horária da disciplina é de 60 horas dividida em 6 aulas ajustadas de modo que você possa desenvolver o conteúdo de cada aula em uma semana de estudos.

Procurei desenvolver cada aula apresentando um texto introdutório sobre o tema e que em alguns momentos pode conter um problema. Na sequência formalizei os conceitos e definições e, depois, exercícios e aplicações.

Ao final de cada aula você ainda terá um resumo com os principais pontos estudados e, por fim, os exercícios de aprendizagem.

Assim, na primeira aula você poderá relembrar potenciação e radiciação. Já na segunda aula: razão, porcentagem e proporção, suas propriedades e algumas aplicações. Na aula três: equação do 1° grau e equação do 2° grau. Na aula quatro: função do 1° grau e função de 2° grau com ênfase na representação gráfica. Na quinta aula, apresentaremos a exponencial e os logaritmos. É conveniente que você relembre potenciação para desenvolver esta aula. O Teorema de Pitágoras, o teorema de Tales e área de figuras planas estão na aula seis.

Espero, dessa forma, contribuir com seu processo de aprendizagem na área da Matemática, mas quero desde já lembrar que o seu sucesso depende também de seu empenho e sua dedicação aos estudos.

Sumário

Aula 1. Potenciação e radiciação

Objetivos:

- reconhecer potência como uma multiplicação de fatores iguais;
- aplicar propriedades de potências de mesma base;
- utilizar potências de base 10;
- reconhecer um radical e suas propriedades; e
- simplificar radicais.

Caro (a) estudante,

Nesta aula estudaremos dois temas básicos, porém muito importantes da matemática: potenciação e radiciação. Vamos desenvolvê-los apresentando primeiramente algumas definições, em seguida, suas propriedades e alguns exemplos e, por fim, as atividades de aprendizagem. Bom estudo!

1.1 Potenciação

Talvez você já tenha estudado potenciação. Então, aproveite para relembrar. Observe a definição a seguir, proposta por Paiva (1999):

Sendo "a" um número real e "n" um número inteiro, tem-se:

$$a^n = \underbrace{a.a.a.\cdots.a}_{n fatores}\ (sen > 1)$$

onde a é a base e n é o expoente

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemplos:

Calcule as seguintes potências:

$a)\ 2^3 = 2.2.2 = 8$

$b)\ (-2)^4 = (-2).(-2).(-2).(-2) = 16$

$c)\ \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4} = \frac{27}{64}$

$d)\ 7^0 = 1$

$e)\ 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$f)\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

(Observação: na prática inverte-se a base e troca-se o sinal do expoente: $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$)

1.1.1 Propriedades das potências de mesma base

As potências possuem propriedades que auxiliam na resolução de problemas. Na verdade é um caminho mais curto para se resolver uma determinada situação. Conforme Paiva (1999), as principais propriedades das potências de mesma base são.

Dados dois números reais “a” e “b”, e os números inteiros “m” e “n”, tem-se:

$a)\quad a^m.a^n = a^{m+n} \quad (mantemos\ a\ base\ e\ adicionamos\ os\ expoentes)$

$b)\quad a^m : a^n = a^{m-n} \quad (para\ a \neq 0,\ mantemos\ a\ base\ e\ subraímos\ os\ expoentes)$

$c)\quad \left(a^m\right)^n = a^{m.n} \quad (mantemos\ a\ base\ e\ multiplicamos\ os\ expoentes)$

$d)\quad (a.b)^n = a^n.b^n \quad (distributiva\ da\ potenciação\ em\ relação\ a\ multiplicação)$

$e)\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (para\ b \neq 0,\ distributiva\ da\ potenciação\ em\ relação\ a\ divisão)$

Exemplos:

Reduza a uma só potência.

$a)\ 3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$

$b) 5^7 \div 5^5 = 5^{7-5} = 5^2$

$c)\ (7^3)^2 = 7^{3 \cdot 2} = 7^6$

$d)\ (5y)^2 = 5^2 \cdot y^2 = 25y^2$

$e)\ \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$

1.1.2 Potências de 10 e a notação científica

Quando trabalhamos com números muito grandes ou muito pequenos, utilizamos a potência de 10 para representá-lo. Como algumas calculadoras (as chamadas calculadoras científicas) trabalham com esse tipo de escrita, é importante que o aluno também reconheça essa forma de escrever.

Vejamos algumas potências de base 10:

$10^2 = 100$ (dois zeros)

$10^3 = 1.000$ (três zeros)

$10^6 = 1.000.000$ (1 milhão – seis zeros)

$10^9 = 1.000.000.000$ (1 bilhão – nove zeros)

Desse modo podemos escrever 6 trilhões como sendo $6 \cdot 10^{12}$. Essa forma de escrever é denominada notação científica: ela tem coeficiente (6) e expoente da potência de base 10 igual a 12. O coeficiente deve ser um número compreendido entre 1 e 10, podendo ser igual a 1, mas menor que 10.

Notação científica: a x 10n, sendo $1 \leq a < 10$

Exemplos:

$340.000.000 = 3,4 \cdot 10^8$

$1.613.000.000 = 1,613 \cdot 10^9$

Também recorremos às potências de base 10 e à notação científica para escrever e operar com números de valor absoluto muito pequeno:

$10^{-2} = 0{,}01$(dois zeros)

$10^{-3} = 0{,}001$ (três zeros)

$10^{-6} = 0{,}000001$ (1 milionésimo – seis zeros)

$10^{-9} = 0{,}000000001$ (1 bilionésimo – nove zeros)

Por exemplo, em notação científica o número cinco bilionésimos se escreve como sendo: 5·10-9 e na forma decimal: 0,000000005.

Exemplos:

Escreva os números decimais usando a notação científica.

a) $0{,}00026 = 2{,}6 \cdot 10^{-4}$

b) $0{,}0000000000525 = 5{,}25 \cdot 10^{-11}$

Agora que tratamos sobre potenciação e suas propriedades, vamos estudar a Radiciação.

1.2 Radiciação

Creio que você já deve ter estudado Radiciação. O tema é normalmente chamado pelos alunos de Raiz (vou calcular a raiz de um número). Procure então relacionar Radiciação com cálculo de raiz que pode ser: raiz quadrada, raiz cúbica, raiz quarta, etc. Acompanhe a definição e os conceitos apresentados por Paiva (1999) a seguir.

Definição: Sendo "a" um número real e "n" um inteiro positivo, define-se:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

Obs.: em um radical $\sqrt[n]{a}$, "a" é chamado de radicando e "n" é o índice.

Nomenclatura:

$\sqrt{a}$ *lê – se raiz quadrada do número a.*

Observe que quando o índice é 2, este pode ser omitido.

$\sqrt[3]{a}$ *lê – se raiz cúbica do número a ou raíz terceira do número a.* (*índice* 3)

$\sqrt[4]{a}$ *lê – se raiz quarta do número a.* (*índice* 4).

$\sqrt[5]{a}$ *lê – se raiz quinta do número a.*

Exemplos:

Vamos calcular os seguintes radicais:

a) $\sqrt[3]{27} = 3,\ pois\ 3^3 = 27$ (procuramos o número que elevado a três é igual a 27.)

b) $\sqrt{9} = 3,\ pois\ 3^2 = 9$ (procuramos o número que elevado a dois é igual a 9.)

c) $\sqrt[5]{0} = 0,\ pois\ 0^5 = 0$ (procuramos o número que elevado a 5 é igual a zero).

d) $\sqrt[3]{-8} = -2,\ pois (-2)^3 = -8$

e) $\sqrt[5]{-1} = -1,\ pois\ (-1)^5 = -1$

f) $\sqrt{-9} = ?,$ (Não existe número real cujo quadrado é igual a -9. Não existe, em $\Re$, radical de índice par e radicando negativo).

Assim como a potenciação, a radiciação também tem suas propriedades que abordaremos a seguir.

1.2.1 Propriedades dos radicais

Assim como desenvolvemos com as potências, os radicais também têm propriedades específicas que auxiliam nos cálculos. Vejamos as principais propriedades.

Dados dois números reais "a" e "b", tais que a ≥ 0 e b ≥ 0 e k e n inteiros positivos, temos:

$a)\ \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

- nesta propriedade podemos escrever uma multiplicação de radicais em um único radical mantendo a multiplicação. É bom lembrar que os índices devem ser iguais.

$b)\ \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $\quad b \neq 0$

- raciocínio análogo ao desenvolvido acima, agora aplicado na divisão.

$c)\ \sqrt[n \cdot p]{a^{k \cdot p}} = \sqrt[n]{a^k}$

- neste caso você pode simplificar os dois lados da equação por p.

$d)\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$

- neste caso o expoente k pode ser colocado como expoente do radicando.

$e)\ \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$

- raiz de raiz multiplicam-se os índices.

Exemplos:

Aplique as propriedades dos radicais e escreva as expressões com apenas um radical:

a) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{6 \cdot 5} = \sqrt[3]{30}$

b) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{12}{2}} = \sqrt{6}$

c) $\sqrt[6]{7^4} = \sqrt[6:2]{7^{4:2}} = \sqrt[3]{7^2}$

d) $\sqrt[3]{8^5} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32$

e) $\sqrt[4]{\sqrt{3}} = \sqrt[4 \cdot 2]{3} = \sqrt[8]{3}$

Vejamos como simplificar os radicais aplicando as propriedades que acabamos de estudar.

1.2.2 Simplificação de radicais

Para simplificar um radical usamos a decomposição em fatores primos do radicando e, em seguida, aplicamos propriedades dos radicais.

Exemplos:

Simplifique os seguintes radicais:

a) $\sqrt{50}$

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 50 = 2 \cdot 5^2$$

Logo, $\sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt[2]{5^2}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{16}$

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 16 = 2^4$$

Logo, $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3.2} = \sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{2} = 2.\sqrt[3]{2}$

1.2.3 Operações com radicais

Neste item vamos aplicar as propriedades dos radicais para efetuar operações de soma, subtração, multiplicação e divisão de radicais. Vamos desenvolver as operações através dos seguintes exemplos:

Efetue:

a) adição e subtração de radicais semelhantes (mesmo radicando)

$$6\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$$

Resolução: $6\sqrt{5}+3\sqrt{5}-2\sqrt{5}=(6+3-2).\sqrt{5}=7\sqrt{5}$

b) adição e subtração de radicais usando simplificação para se obter o mesmo radicando

$$4\sqrt{18}+3\sqrt{8}$$

Resolução:

Decompondo os radicandos 18 e 8, temos:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 18 = 2.3^2 \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 8 = 2^3$$

Desse modo:

$$\sqrt{18}=\sqrt{2.3^2}=\sqrt{2}.\sqrt{3^2}=3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=\sqrt{2^2.2}=2\sqrt{2}$$

logo:

$$4\sqrt{18}+3\sqrt{8}=4.3\sqrt{2}+3.2\sqrt{2}=12\sqrt{2}+6\sqrt{2}=18\sqrt{2}$$

c) multiplicação de radicais de mesmo índice:

$$2\sqrt[3]{5}\cdot 4\sqrt[3]{7}=(2\cdot 4)\sqrt[3]{5\cdot 7}=8\sqrt[3]{35}$$

d) divisão de radicais de mesmo índice:

$$8\sqrt[5]{18}:2\sqrt[5]{3}=\frac{8\sqrt[5]{18}}{2\sqrt[5]{3}}=\frac{8}{2}\sqrt[5]{\frac{18}{3}}=4\sqrt[5]{6}$$

1.2.4 Potência de expoente racional

Quando escrevemos potência de expoente racional estamos nos referindo a um expoente na forma de uma fração e, neste caso, temos todo um trabalho especial a ser desenvolvido. Vejamos:

Se “a” é um número real qualquer e “m” e “n” são inteiros positivos, definimos:

i) $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ *quando* $\sqrt[n]{a}$ *existe;* (perceba que estamos "transformando" uma potência de expoente fracionário em uma raiz).

ii) se a ≠ 0, então $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

Exemplos:

Escreva as expressões abaixo na forma de um radical (use a potência de expoente racional).

a) $5^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{5^4}$

b) $16^{0,5} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

c) $4^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8$

d) $(-27)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{(-27)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{-27}\right)^2} = \dfrac{1}{(-3)^2} = \dfrac{1}{9}$

Resumo

Nesta aula tratamos da potenciação. Vimos que:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n\ fatores} (sen > 1)$ onde a é a base e n é o expoente.

Mostramos os casos especiais da potenciação

$5^0 = 1$ (qualquer número elevado a zero é igual a 1)

$5^1 = 5$ (qualquer número elevado a 1 é igual ao próprio número)

$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ (expoente negativo → inverte a base e troca o sinal do expoente)

Abordamos as propriedades das potências de mesma base.

$a)\quad a^m.a^n = a^{m+n} \quad (mantemos\ a\ base\ e\ adicionamos\ os\ expoentes)$

$b)\quad a^m : a^n = a^{m-n} \quad (para\ a \neq 0,\ mantemos\ a\ base\ e\ subraímos\ os\ expoentes)$

$c)\quad \left(a^m\right)^n = a^{m.n} \quad (mantemos\ a\ base\ e\ multiplicamos\ os\ expoentes)$

$d)\quad (a.b)^n = a^n.b^n \quad (distributiva\ da\ potenciação\ em\ relação\ a\ multiplicação)$

$$e)\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (para\ b \neq 0,\ distributiva\ da\ potenciação\ em\ relação\ a\ divisão)$$

Usamos a notação científica para escrever números muito pequenos ("peso" de um fio de cabelo) ou números muito grandes (distância da terra ao sol).

a . 10n, sendo $1 \leq a < 10$

Tivemos a oportunidade de estudar:

- Radiciação

Sendo "a" um número real e "n" um inteiro positivo, define-se:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

- Propriedades da radiciação

$$a)\ \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$b)\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad b \neq 0$$

$$c)\ \sqrt[n \cdot p]{a^{k \cdot p}} = \sqrt[n]{a^k}$$

$$d)\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

$$e)\ \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$$

- Simplificação de radicais utilizando a decomposição em fatores primos.

A seguir trabalhamos as operações entre radicais semelhantes e não-semelhantes utilizando a decomposição em fatores primos na simplificação dos radicais.

E finalmente tratamos da potência de expoente racional:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad quando \quad \sqrt[n]{a} \quad existe$$

A seguir sugiro que você resolva as atividades de aprendizagem. Caso surja alguma dúvida, refaça os exemplos da aula.

Atividades de aprendizagem

1. Calcule o valor das potências:

a) $8^2 =$

b) $(-8)^2 =$

c) $-8^2 =$

d) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 =$

e) $7^{-2} =$

f) $5^0 =$

g) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-2} =$

2. Aplique as propriedades e reduza a uma só potência:

a) $4^6 \cdot 4^4 =$

b) $10^6 : 10^4 =$

c) $\left(t^2\right)^4 =$

d) $\frac{x^3}{y^3} =$

e) $\left(3^5\right)^2 \cdot \left(3^2\right)^{-3} =$

f) $\frac{5^4 \cdot 5}{5^3} =$

3. Complete a tabela:

Forma decimal	Notação científica
4.500.000.000	
0,0000032	
	$5{,}2.10^{8}$
	$2{,}3.10^{-6}$

4. Calcule as raízes:

a) $\sqrt[3]{125} =$

b) $\sqrt[3]{-125} =$

c) $\sqrt{0{,}04} =$

d) $256^{\frac{3}{4}} =$

e) $\sqrt{36} =$

f) $16^{\frac{1}{2}} =$

5. Simplifique os radicais:

a) $\sqrt[3]{40} =$

b) $\sqrt{12} =$

6. Efetue as seguintes expressões envolvendo radicais:

a) $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} =$

b) $4\sqrt{2} + 5\sqrt{50} - 3\sqrt{18} =$

7. O valor de $(0{,}2)^3 + (0{,}16)^2$ é:

a) 0,0264 **b)** 0,0336 **c)** 0,1056 **d)** 0,2568 **e)** 0,6256

Caro (a) estudante,

Chegamos ao final de nossa primeira aula. Espero que você tenha compreendido os conceitos de potenciação e radiciação e feito os exercícios propostos.

Partimos, agora, para uma nova etapa. Na próxima aula vamos estudar razão, proporção e porcentagem. Espero que não tenha dificuldades e que não deixe de fazer os exercícios propostos.

Lembre-se que a sua dedicação aos estudos é que permitirá você se tornar um excelente profissional na área em que está se qualificando

Aula 2. Razão, proporção e porcentagem

Objetivos:

- reconhecer o significado de uma razão;
- aplicar propriedades das razões;
- definir uma proporção;
- identificar o significado de uma proporção;
- efetuar cálculos com porcentagem; e
- aplicar razão, proporção e porcentagem na resolução de problemas.

Caro (a) estudante,

Nesta aula estudaremos outros três temas de grande importância na matemática e de muita aplicabilidade na administração: razão, proporção e porcentagem. Vamos desenvolvê-los apresentando primeiramente algumas definições, em seguida suas propriedades e alguns exemplos e, por fim, os exercícios e aplicações. Bom estudo!

2.1 Razão

Vamos procurar abordar esse tema através de um problema adaptado de Iezzi, Dolce, Machado (2009).

Observe a seguinte situação:

Em uma empresa, Marcos ganha R$ 750,00, João ganha R$ 1.500,00 e, Mônica, R$ 3.000,00.

Podemos então afirmar que:

- João ganha o dobro do salário de Marcos, ou seja, $1.500 \div 750 = 2$

- Mônica ganha o quádruplo do salário de Marcos, ou seja, $3.000 \div 750 = 4$.

Em termos matemáticos podemos dizer que:

- A razão entre o salário de João e o salário de Marcos é 2, isto é, $\frac{1.500}{750} = 2$

- A razão entre o salário de Mônica e o salário de Marcos é 4, isto é, $\frac{3.000}{750} = 4$

Lembre-se de que simplificar uma fração significa encontrar um número que divide o numerador e o denominador ao mesmo tempo.

Assim podemos afirmar que:

A razão entre dois números não-nulos é o quociente entre eles.

Notação matemática: sejam os números "**a**" e "**b**", sendo $b \neq 0$. A razão entre os números "**a**" e "**b**", ou ainda, a razão de um número "**a**" para um número "**b**", é indicada por:

$$\frac{a}{b} \text{ ou } a \div b$$

Exemplo1: Num vestibular com 40 questões, Luciano acertou 10. Qual a razão entre o número de questões corretas e o número total de questões?

Resposta: razão: $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ (lê-se 1 para 4 – neste caso estamos dividindo numerador e denominador por 10) ou seja, Luciano acerta 1 questão para cada 4 questões resolvidas.

Exemplo 2: Foi feita uma pesquisa com 500 alunos de uma academia e chegou-se aos seguintes resultados:

250 alunos praticam musculação.

100 alunos praticam ginástica.

150 alunos praticam pilates.

Determine:

a) A razão entre o número de alunos que praticam musculação e o número total de alunos da academia.

Resposta:

$\frac{250}{500} = \frac{25}{50} = \frac{5}{10}$ (5 a cada 10 alunos)

b) A razão entre o número de alunos que praticam ginástica e o número total de alunos da academia.

Resposta:

$\frac{100}{500} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$ (1 a cada 5 alunos)

c) A razão entre o número de alunos que praticam ginástica e o número de alunos que praticam musculação.

Resposta:

$\frac{100}{250} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ (2 a cada 5 alunos)

d) A razão entre o número de alunos que praticam pilates e o número total de alunos da academia.

Resposta:

$\frac{150}{500} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$ (3 a cada 10 alunos)

Exemplo 3: Três amigos, Paulo, Carlos e Gilberto, decidiram montar um comércio de bebidas. O investimento total para montar o negócio foi de R$ 20.000,00. Paulo entrou com R$ 5.000,00, Carlos com R$ 8.000,00 e Gilberto com R$ 7.000,00.

Determine:

a) A razão entre o valor investido por Paulo e o valor total para montar o negócio.

Resposta:

$$\frac{5000}{20000} = \frac{5\ (:5)}{20\ (:5)} = \frac{1}{4}$$

b) A razão entre o valor investido por Carlos e o valor total para montar o negócio.

Resposta:

$$\frac{8000}{20000} = \frac{8\ (:4)}{20\ (:4)} = \frac{2}{5}$$

c) A razão entre o valor investido por Gilberto e o valor total para montar o negócio.

Resposta:

$$\frac{7000}{20000} = \frac{7}{20}$$

2.2 Proporção

Agora que você já relembrou o que é uma razão, vamos ampliar os nossos estudos para proporção. A ideia de proporção está presente em muitas áreas, desde uma receita simples de bolo até a composição de medicamentos. Vejamos então o conceito de proporção.

A razão entre os números 3 e 6 é igual a $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

A razão entre os números 250 e 500 é igual a $\frac{250}{500} = \frac{1}{2}$.

Logo, podemos dizer que $\frac{3}{6} = \frac{250}{500}$

e neste caso dizemos que 3, 6, 250 e 500, formam, **nessa ordem**, uma proporção.

Assim, concluímos que:

Uma proporção é uma igualdade entre duas razões.

Definição: os números "a", "b", "c" e "d" formam, **nessa ordem**, uma proporção se, e somente se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, sendo "b" e "d" não nulos.

Notação: $a : b = c : d$ (lê-se: "**a**" está para "**b**" assim como "**c**" está para "**d**")

Numa proporção, os números "**a**"e "**d**" são chamados de *extremos* e os números "**c**" e "**b**" são chamados de *meios*.

Exemplo: Os números 30, 40, 12 e 16 formam uma proporção?

Vamos verificar:

$\frac{30}{40} = \frac{3}{4}$ e $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

assim $\frac{30}{40} = \frac{12}{16}$ formam de fato uma proporção

2.2.1 Propriedade fundamental das proporções

É importante você compreender que em toda proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow b \quad = d$$

Exemplo 1: Verifique se as seguintes razões formam uma proporção (utilize a propriedade fundamental das proporções):

a) $\frac{7}{5}$ e $\frac{10}{14}$ 7 × 14 = 98 e 5 ×10 = 50 assim $\frac{7}{5}$ e $\frac{10}{14}$ não formam uma proporção

b) $\frac{2}{3}$ e $\frac{8}{12}$ 2×12 = 24 e 3×8 = 24 assim $\frac{2}{3}$ e $\frac{8}{12}$ formam uma pro -porção

Exemplo 2: Calcule o valor de x nas seguintes proporções. (Vamos antecipar a resolução de equações do 1° grau – será visto com maior profundidade na aula 3).

a) $\frac{x}{5} = \frac{8}{2}$

Resolução:

Usando a propriedade fundamental das proporções temos:

$$2x = 8 \cdot 5$$
$$2x = 40$$
$$x = \frac{40}{2}$$
$$x = 20$$

$b)\ \dfrac{x+3}{5} = \dfrac{9}{4}$

Resolução:

Usando a propriedade fundamental das proporções temos:

$$4(x + 3) = 9 \cdot 5$$
$$4x + 12 = 45$$
$$4x = 45 - 12$$
$$4x = 33$$
$$x = \frac{33}{4}$$

$c)\ \dfrac{6}{4} = \dfrac{12}{x}$

Resolução:

Usando a propriedade fundamental das proporções temos:

$$6x = 12 \cdot 4$$
$$6x = 48$$
$$x = \frac{48}{6}$$
$$x = 8$$

Exemplo 3: Calcule o valor desconhecido nas sequências abaixo sabendo que elas formam uma proporção na ordem em que estão.

$a)\ x, 4, 5, 8$

Resolução

Como x, 4, 5, 8 formam uma proporção, nessa ordem, temos:

$$\frac{x}{4} = \frac{5}{8}$$

Usando a propriedade fundamental das proporções temos:

$$8x = 4 \cdot 5$$

$$8x = 20$$

$$x = \frac{20}{8}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Lembre-se de simplificar a fração $\frac{20\,(:4)}{8\,(:4)} = \frac{5}{2} = 2{,}5\ (usando\ uma\ calculadora)$

$b)\ 6, 2, x, 12$

Resolução

Como 6, 2, x, 12 formam uma proporção, nessa ordem, temos:

$$\frac{6}{2} = \frac{x}{12}$$

Usando a propriedade fundamental das proporções temos:

$$2x = 6 \cdot 12$$

$$2x = 72$$

$$x = \frac{72}{2}$$

$$x = 36$$

Espero que você tenha assimilado os conteúdos razão e proporção para adentrarmos no estudo das porcentagens.

2.3. Porcentagem (%)

Vamos iniciar um dos tópicos mais importantes desta disciplina. Com certeza você já deve ter enfrentado várias situações onde o cálculo com porcentagem era necessário. Para Paiva (1999) porcentagem é uma razão centesimal ou percentual na qual o denominador da sua forma fracionária é igual a 100.

Assim temos:

Forma percentual	Forma fracionária	Forma decimal
25%	$\frac{25}{100}$	0,25
7%	$\frac{7}{100}$	0,07
2%	$\frac{2}{100}$	0,02
135%	$\frac{135}{100}$	1,35
1,34%	$\frac{1,34}{100} = \frac{134}{10000}$	0,0134

Você pode calcular porcentagem de vários modos. Vou apresentar, aqui, um modo de cálculo. Nada impede você de adotar outros modos de cálculo conforme tenha aprendido em outros cursos ou nas experiências no seu cotidiano.

Exemplo 1: Calcule 37% de R$ 740,00.

Vamos resolver usando a forma decimal.

$37\%\ de\ 740,00 = 0,37 \times 740,00 = R\$\ 273,80$

Exemplo 2: Um colégio tem 2.000 alunos. Quanto representa percentualmente a 5ª Série A, que tem 40 alunos do total de alunos do colégio?

Resolução: $\frac{40\ alunos\ da\ 5^aA}{2.000\ alunos\ do\ colégio} = 0,02 = 2\%$

Exemplo 3: Numa classe de 60 alunos, 5% dos alunos estão usando camisa branca. Quantos são os alunos que não estão usando camisa branca?

Resolução:

O número de alunos que usam camisa branca equivale a 5% de 60 alunos da classe, ou seja, 0,05 x 60 = 3 alunos.

Assim, o número de alunos que não estão usando camisa branca será 60 – 3 = 57 alunos.

Resumo

Iniciamos esta aula definindo razão entre dois números não nulos como sendo o quociente entre eles. A seguir vimos que proporção é uma igualdade entre duas razões. E finalmente mostramos que porcentagens é uma razão centesimal ou percentual na qual o denominador da sua forma fracionária é igual a 100. Sugiro que você refaça os exemplos citados no decorrer da aula antes de fazer as atividades de aprendizagem.

Atividades de aprendizagem

1. Determine a razão entre os números 10 e 50.

2. Em uma reunião de negócios eram esperadas 10 pessoas, porém 2 não conseguiram participar devido a problemas pessoais. Determine a razão entre o número de participantes e o total de pessoas esperadas para essa reunião.

3. Calcule 5% de R$ 850,00.

4. Dentre os 1250 médicos que participam de um congresso, 48% são mulheres. Dentre as mulheres, 9% são pediatras. Quantas mulheres pediatras participaram desse congresso?

5. O preço de certa mercadoria sofre um reajuste de 15%. Supondo que o preço da mercadoria era de R$ 500,00 calcule o reajuste sofrido.

6. Verifique se os seguintes números formam uma proporção:

a) 3, 4, 6 e 8 **b)** 12, 15, 4 e 3 **c)** 6, 9, 12 e 27

7. Pedro e Marcos trabalham em uma fábrica. Pedro recebe R$ 900,00 ao mês e Marcos recebe R$ 1.200,00. Determine a razão entre os salários de Pedro e de Marcos.

Caro (a) estudante,

Chegamos ao final de nossa segunda aula. Estudamos razão, proporção e porcentagem. Não pretendemos esgotar o assunto aqui. Procure sempre estar pesquisando e se aprofundando mais ainda sobre os assuntos estudados e não deixe de fazer os exercícios propostos.

Vamos para outra etapa. Na terceira aula você vai estudar equações (do 1° grau e do 2° grau).

É um assunto interessante, pois tem várias aplicações e creio que você vai se lembrar, sem problemas, do processo de resolução de equação do 1° grau (isolar a incógnita) e da equação do 2° grau (Fórmula de Bháskara).

Lembre-se que a dedicação e disciplina nos estudos é que vão fazer diferença no resultado que você alcançará ao finalizar o curso que está realizando.

Aula 3. Equação do 1º grau e equação do 2º grau

Objetivos:

- reconhecer uma equação;
- identificar equações do 1º grau e do 2º grau;
- resolver equações do 1º grau e equações do 2º grau (usando Bháskara); e
- aplicar as equações na resolução de problemas.

Caro (a) estudante,

Nesta aula vamos dar continuidade aos estudos com dois assuntos bastante interessantes da Matemática: equação do 1º grau e equação do 2º grau. Iezzi, Dolce, Machado (2009) desenvolvem o tema apresentando primeiramente um problema, depois os conceitos e exercícios. Vamos procurar desenvolver essa aula seguindo a linha proposta pelos autores citados acima. Bons estudos!

3.1 Equação do 1º grau

O estudo das equações objetiva determinar o valor de algo desconhecido, normalmente representado por uma ou mais variáveis ou incógnitas.

Vamos analisar a seguinte situação:

Observe a balança:

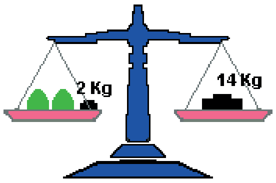


Figura 1
Fonte: autor

A balança está equilibrada. Em um dos pratos temos um peso de 14 Kg. No outro prato temos dois pacotes de arroz e um peso de 2 Kg. Qual o peso de cada pacote de arroz?

Vamos tentar resolver este problema juntos:

a) Use a variável "x" para indicar cada pacote de arroz e escreva uma sentença matemática que expresse a situação da balança em equilíbrio.

$2x + 2 = 14$ (obs.: lembre-se de que a igualdade representa a balança em equilíbrio)

b) Agora vamos tentar obter o valor de "x" levando-se em consideração que a balança deve permanecer em equilíbrio.

As propriedades matemáticas que me permitem realizar este processo de resolução são as seguintes:

Tendo uma sentença matemática expressa por uma igualdade (uma equação) pode-se:

- Adicionar ou subtrair valores iguais a ambos os membros de uma equação que a igualdade continua sendo válida. (A balança continua em equilíbrio).

- Pode-se multiplicar ou dividir ambos os membros de uma equação por um mesmo valor diferente de zero que a igualdade continua sendo válida. (A balança continua em equilíbrio).

Desse modo, temos:

$2x + 2 = 14$

$2x + 2 - 2 = 14 - 2$ (subtraímos 2 nos dois membros da equação)

$2x = 12$

$\frac{2x}{2} = \frac{12}{2}$ (dividimos os dois membros da equação por 2)

$x = 6$

Resposta: cada pacote de arroz pesa 6 Kg.

O número 6 é chamado raiz (ou solução) da equação $2x + 2 = 14$ de tal modo que quando colocado no lugar da incógnita, transforma a equação em uma sentença verdadeira.

$2.(6) + 2 = 14 \; (Verdadeiro)$

Ao resolver uma equação com uma incógnita, procuramos deixar os termos que contêm a incógnita no primeiro membro e os demais no segundo membro. Quando chegamos a uma equação da forma

$$ax = b$$

em que "a" e "b" são números reais conhecidos e $a \neq 0$, dizemos que se trata de uma equação do 1o grau.

Na equação ax = b, temos:

- "x" é a incógnita;
- "a" é o coeficiente;
- "b" é o termo independente.
- sendo $a \neq 0$, a raiz é $\frac{b}{a}$.

Uma equação com uma incógnita "x" é denominada equação do 1o grau se puder ser reduzida através de operações elementares à forma ax = b, em que "a" e "b" são números reais e $a \neq 0$.

Exemplos:

5x = 17	a = 5	b = 17
-2x = 23	a = -2	b = 23
$\frac{x}{2} = 0$	$a = \frac{1}{2}$	b = 0

Observe que, se a = 0, a equação fica reduzida a 0x = b (não é equação de 1o grau) e, nesse caso, se $b \neq 0$, a equação é impossível e se $b = 0$, a equação é *indeterminada*.

De modo prático:

Vamos resolver juntos as equações abaixo de modo mais prático:

a) $2x + 3 = 15$

$4x = 15 - 3$

$4x = 12$

$$x = \frac{12}{4}$$

$x = 3$

S = { 3 }

b) $5x - 91 = 4x - 77$

$5x + 5x = -77 + 91$

$x = 14$

S = { 14 }

c) $\frac{x+1}{3} + \frac{3x-1}{2} = \frac{2x+1}{4} - \frac{37}{12}$

Primeiramente vamos multiplicar os dois membros da equação pelo mmc (mínimo múltiplo comum) entre os denominadores 3, 2, 4 e 12, que no caso é 12.

$$12.\frac{x+1}{3} + 12.\frac{3x-1}{2} = 12.\frac{2x+1}{4} - 12.\frac{37}{12}$$

$$4.(x+1) + 6.(3x-1) = 3.(2x+1) - 37$$

$$4x + 4 + 18x - 6 = 6x + 3 - 37$$

$$4x + 18x - 6x = 3 - 37 - 4 + 6$$

$$16x = -32$$

$$x = -\frac{32}{16}$$

$$x = -2$$

S = { -2 }

Vejamos alguns problemas que recaem em equação do 1° grau:

1. Um carpinteiro cortou um caibro de 11m de comprimento em dois pedaços. Um dos pedaços tem 1m a menos que o dobro do outro. Qual é a medida do maior pedaço?

Resolução:

Chamamos de "x" o menor pedaço, assim o maior pedaço será representado por 2x – 1 (o dobro do menor pedaço menos 1m). Sabendo que o caibro tem 11m de comprimento chegamos à seguinte equação do 1° grau:

menor pedaço + maior pedaço = 11m

$$x + 2x - 1 = 11$$
$$3x = 11 + 1$$
$$3x = 12$$
$$x = \frac{12}{3}$$
$$x = 4m$$

Assim o pedaço menor tem 4m e o pedaço maior (2x – 1) tem 2.4 – 1 = 7m

2. A população de uma cidade "A" é o triplo da população da cidade "B". Se as duas cidades juntas têm uma população de 100.000 habitantes, quantos habitantes têm a cidade B?

Resolução:

Chamamos de "x" a população da cidade "B". Desse modo a população da cidade "A" fica representada por 3x (o triplo da cidade "B"). Assim, chegamos à seguinte equação:

$$x + 3x = 100.000$$
$$4x = 100.000$$
$$x = \frac{100.000}{4}$$
$$x = 25.000$$

Resposta: A cidade "B" tem 25.000 habitantes e a cidade "A" possui 75.000 habitantes.

2. Carlos, Eduardo e André receberam juntos por um trabalho R$ 205,00. Carlos recebeu R$ 3,00 a mais do que Eduardo, e André recebeu R$ 15,00 a menos do que o triplo que Carlos. Quanto recebeu cada um?

Resolução:

Eduardo: x

Carlos: x + 3

André: 3.(x + 3) – 15

Eduardo + Carlos + André = 205

$x + x + 3 + 3 \cdot (x + 3) - 15 = 205$
$2x + 3 + 3x + 9 - 15 = 205$
$5x - 3 = 205$
$5x = 205 + 3$
$5x = 208$
$x = \frac{208}{5}$
$x = 41{,}6$

Assim,

Eduardo recebeu R$ 41,60

Carlos recebeu 41,60 + 3,00 = R$ 44,60

André recebeu 3.(44,60) -15,00 = 133,80 – 15,00 = R$ 118,80

3. Calcule o valor de "x" na seguinte proporção: $\frac{x+5}{3} = \frac{7}{2}$

Resolução: para resolver você deve lembrar-se da propriedade fundamental das proporções (veja unidade 1).

$$\frac{x+5}{3} = \frac{7}{2}$$

$2 \cdot (x + 5) = 3 \cdot 7$

$2x + 10 = 21$

$2x = 21 - 10$

$2x = 11$

$x = \frac{11}{2}$

Você acabou de resolver equações do 1° grau. Espero que tenha compreendido.

Vamos dar sequência resolvendo equações do 2° grau. Você vai ver que no início pode parecer difícil, mas aos poucos as coisas vão ficando mais claras.

3.2 Equação do 2° grau

Toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que "a", "b" e "c" são números reais (coeficientes da equação) e $a \neq 0$ é chamada de uma equação do 2° grau na incógnita "x".

Quando o coeficiente "b" ou "c" é igual a zero, a equação é dita incompleta:

$ax^2 + bx = 0$ (neste caso $c = 0$) ou

$ax^2 + c = 0$ (neste caso $b = 0$).

A resolução (encontrar as raízes) de uma equação do 2° grau é feita através da seguinte fórmula resolutiva (também conhecida como Fórmula de Bháskara):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad onde \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Δ (delta), também chamado de discriminante da equação, nos diz se a equação terá solução real ou não e o número de soluções. Assim:

se $\Delta > 0$, então a equação admite duas soluções reais e distintas;

Conforme Iezzi, Dolce, Machado (2009), Bhaskara, matemático e astrólogo hindu (1114 – 1185) é conhecido no Brasil como autor da fórmula resolutiva para equação do 2º grau. Não se sabe a origem desse costume, pois em outros países a fórmula não é conhecida assim. Sabe-se que há três milênios os babilônios já sabiam resolver as equações de 2º grau.

se $\Delta = 0$, então a equação admite duas soluções reais e iguais;

se $\Delta < 0$, então a equação não tem solução real.

Vamos exemplificar:

Encontre as raízes das seguintes equações do 2° grau no conjunto dos números reais ($U = \Re$):

a) $4y^2 - 25 = 0$

Observe que esta é uma equação incompleta com b = 0 e pode ser resolvida isolando "y" no primeiro membro da equação. Não tem necessidade da utilização da Fórmula de Bháskara.

$$4y^2 = 25$$
$$y^2 = \frac{25}{4}$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{25}{4}}$$
$$y = \pm\frac{5}{2}$$

conjunto solução $S = \left\{\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right\}$

b) $x^2 + 7x = 0$

Observe que esta é uma equação incompleta com c = 0 e pode ser resolvida usando fatoração (fator comum em evidência). Também não tem necessidade da utilização da Fórmula de Bháskara.

Perceba que "x" é o fator comum e que, se o produto de dois números reais é igual a zero, então pelo menos um dos fatores é igual a zero. Assim temos:

$x \cdot (x + 7) = 0$

$x = 0$

ou

$x + 7 = 0$

$x = -7$

cojunto solução $S=\{0, -7\}$

c) $x^2 - 7x + 10 = 0$

Observe que esta é uma equação completa com a = 1, b = -7 e c = 10. Vamos resolvê-la usando a Fórmula de Bháskara.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10$$
$$\Delta = 49 - 40$$
$$\Delta = 9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{7 \pm 3}{2}$$

conjunto solução $S = \{2, 5\}$

d) $3x^2 + 5x + 6 = 0$

Observe que esta é uma equação completa com a = 3, b = 5 e c = 6. Vamos resolvê-la usando a Fórmula de Bháskara.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (5)^2 - 4.3.6$$
$$\Delta = 25 - 72$$
$$\Delta = -47$$

Perceba que $\Delta < 0$ (negativo), portanto a equação não admite solução real.

Conjunto Solução S = Ø (conjunto vazio)

e) $t^2 - 10t + 25 = 0$

Observe que esta é uma equação completa com a = 1, b = -10 e c = 25. Vamos resolvê-la usando a Fórmula de Bháskara.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-10)^2 - 4.1.25$$
$$\Delta = 100 - 100$$
$$\Delta = 0$$

Perceba que Δ = 0, portanto a equação terá duas raízes reais e iguais.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{10 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = x_2 = \frac{10}{2} = 5$$

conjunto solução $S = \{\ 5\ \}$

Resumo

Nesta aula abordamos as equações do 1° grau cuja fórmula geral é dada por ax = b, onde "a" e "b" são números reais conhecidos e a ≠ 0. Também identificamos os termos da equação ax = b, isto é, "x" é a incógnita; "a" é o coeficiente; "b" é o termo independente. Sendo , a solução ou raiz da equação do 1° grau é $\frac{b}{a}$. Em seguida tratamos da equação do 2° grau ax^2 + bx + c = 0 (forma re- duzida). Com a, b e c números reais e a é diferente de zero. Para resolver recorremos à Fórmula de Bháskara:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ *onde* $\Delta = b^2 - 4ac$. Comentamos também sobre os casos particulares, ou seja, as equações incompletas do 2° grau. Vimos que: se b = 0 então podemos resolver isolando "x" e usando a raiz quadrada; se c = 0 então podemos resolver usando fatoração. Assim chegamos ao final de mais uma aula. Agora é sua vez de praticar. Vamos lá!

Atividades de aprendizagem

1. Resolva as seguintes equações do 1° grau dentro do conjunto dos números reais:

a) 5x + 1=36

b) $7x = 4x + 5$

c) $9x - 7 = 5x + 13$

d) $2(2x - 1) - 6(1 - 2x) = 2(4x - 5)$

e) $\frac{3x}{4} - \frac{2}{3} = x - \frac{5}{2}$

2. Exercícios: Sendo , resolva as equações abaixo indicando o seu conjunto solução.

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

b) $6y^2 + y - 1 = 0$

c) $x^2 - 5x = 0$

d) $5x^2 - 45 = 0$

e) $9x^2 - 6x + 5 = 0$

3. Subtraindo 25 de um certo número obtemos 11. Qual é esse número?

4. Qual o número que adicionado a 15 é igual a 31?

5. O triplo de um número menos 7 é igual a 80. Qual é esse número?

6. A soma de dois números é igual a 50. O número maior é o quádruplo do número menor. Calcule os números.

7. A soma de um número real positivo e o seu quadrado dá 30. Qual é esse número?

Caro (a) estudante,

Chegamos ao final da terceira aula na qual você teve oportunidade de estudar equações do 1º e 2º Graus. Agora que a aula está concluída você deve ter percebido que não é tão complicado como imaginava. Vamos para a 4ª aula e nela apresentaremos as funções de 1º e 2º Graus. Para poder prosseguir é importante que você tenha compreendido o conteúdo que foi finalizado agora. Você vai perceber durante o desenvolvimento do próximo tema que se trata de um assunto interessante, pois traz várias aplicações e espero que se lembre do processo de resolução da equação de 1° Grau, que envolve isolar a incógnita, e da equação de 2° Grau, aplicando a fórmula de Bháskara. Continua sendo importante a sua dedicação nos estudos pra finalizar com êxito esta disciplina.

Aula 4. Função do 1º grau e função do 2º grau

Objetivos:

- reconhecer uma função;
- identificar funções do 1º grau e do 2º grau;
- identificar a representação gráfica de uma função do 1º grau (a reta);
- distinguir a representação gráfica de uma função do 2º grau (a parábola); e
- aplicar os conceitos de função na resolução de problemas.

Caro (a) estudante,

Nesta aula estudaremos dois temas muito importantes da matemática e de muita aplicabilidade: Função do 1º grau e Função do 2º grau. Dante (2003) argumenta no sentido de que o conceito de função é um dos mais importantes da matemática e das ciências em geral e está presente sempre que relacionamos duas grandezas. Vamos desenvolver essa aula apresentando um problema introdutório, as definições (formalizando o conceito), em seguida suas propriedades e alguns exemplos e, por fim, os exercícios. Bom estudo!

4.1 Função do 1º grau ou função afim

Vamos iniciar nossos estudos sobre função apresentando um problema introdutório. Fique atento e observe a relação que o problema apresenta.

Problema: A remuneração de um vendedor de uma loja de camisas (seu salário) é feita em duas parcelas: uma fixa, no valor de R$ 500,00 e a outra variável, correspondente a uma comissão de 12% sobre o valor total de vendas realizadas no mês.

Chamando de “x” o valor total das vendas no mês e de “R(x)” a remuneração mensal do vendedor, temos:

$R(x) = 500 + 0,12x$ obs.: 12% = 0,12

Assim, por exemplo: se o vendedor atingir vendas no valor de R$ 6.250,00 no mês, sua remuneração será de R$ 1.250,00. Veja:

$$R(x) = 500 + 0,12.6250,00$$

$$R(x) = 500 + 750$$

$$R(x) = 1250$$

Notamos que a remuneração mensal do vendedor, “R(x)”, é calculada de acordo com o valor total de vendas realizadas no mês, ou seja, a remuneração é calculada em **função** do valor total de vendas no mês. Desse modo podemos pensar na seguinte tabela, supondo alguns valores totais de venda no mês.

Mês	Valor Total de Vendas (R$)	Remuneração Mensal (R$)
Janeiro	2.000,00	740,00
Fevereiro	4.240,00	1.008,80
Março	3.730,00	947,60
Abril	5.900,00	1.208,00

Faça seus cálculos e verifique os dados da tabela acima.

Assim, chegamos à seguinte definição:

Chamamos função polinomial do 1o grau ou afim a qualquer função $f:\Re \to \Re$ definida por $f(x) = ax + b$, onde os coeficientes “a” e “b” são números reais e $a \neq 0$.

“a” é o coeficiente angular.

“b” é o coeficiente linear.

Exemplos:

- $f(x) = 2x + 6$, onde $a = 2$ e $b = 6$

- $f(x) = -3x + \frac{4}{5}$, onde a = -3 e b = $\frac{4}{5}$
- f(x) = 2x, onde a = 2 e b = 0

4.1.1 Representação gráfica de uma função do 1° grau

A representação gráfica de uma função do 1o grau, y = ax + b, pode ser feita seguindo os seguintes passos:

- Atribui-se alguns valores para "x" e calculam-se os correspondentes valores de "y", organizando-os em uma tabela.
- Localizam-se no **plano cartesiano** os pontos (x, y) e traçando a reta que passa por eles.

O sistema de coordenadas cartesiano (Plano Cartesiano) se deve ao matemático, físico e filosofo francês René Descartes (1596 – 1650) que formalizou o sistema de coordenadas em sua obra *Géométrie* (1637), PAIVA (1999).

Exemplo:

a) Vamos construir o gráfico da função f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por: y = 2x – 1

1° passo: tabela (atribuímos aqui os seguintes valores para x: -2, -1, 0, 1 e 2).

x	y = 2x – 1	Ponto (x,y)
-2	y = 2.(-2) -1 = - 4 - 1= -5	(-2, -5)
-1	y = 2.(-1) -1 = - 2 - 1= -3	(-1, -3)
0	y = 2.(0) -1 = 0 - 1= -1	(0, -1)
1	y = 2.(1) -1 = 2 - 1= 1	(1, 1)
2	y = 2.(2) -1 = 4 - 1= 3	(2, 3)

2° passo: marcando pontos no referencial cartesiano e traçando a reta

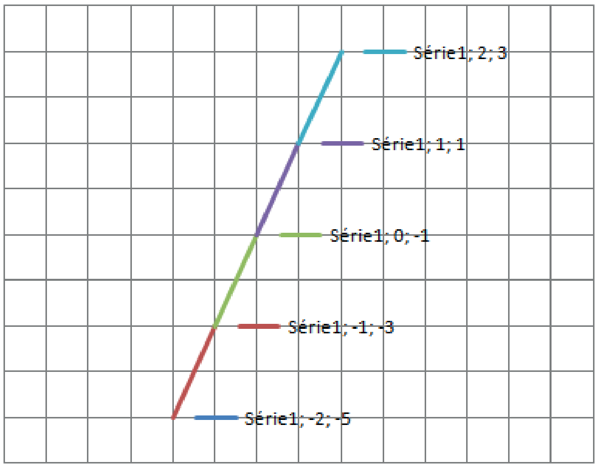


Figura 2
Fonte: autor

Observe que o gráfico da função y = 2x – 1 é **crescente**, ou seja, para quaisquer elementos x1 e x2 do domínio de uma função f (-2, -1, 0, 1, 2), com x1< x2, temos f(x1) < f(x2). De modo prático, se o coeficiente a > 0 então a função do 1° grau é crescente (no caso a = 2).

b) Vamos construir o gráfico da função f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por: y = - 3x + 1

1° passo: tabela (atribuímos, aqui, os seguintes valores para x: -2, -1, 0, 1 e 2).

x	y = -3x + 1	Ponto (x,y)
-2	y = -3.(-2) +1 = 6 +1= 7	(-2, 7)
-1	y = -3.(-1) +1 = 3 +1= 4	(-1, 4)
0	y = -3.(0) +1 = 0 +1= 1	(0, 1)
1	y = -3.(1) +1 = -3 +1= -2	(1, -2)
2	y = -3.(2) +1 = -6 +1= -5	(2, -5)

2° passo: marcando pontos no referencial cartesiano e traçando a reta

Figura 3
Fonte: autor

Observe que o gráfico da função y = -3x + 1 é **decrescente**, ou seja, para quaisquer elementos x1 e x2 do domínio de uma função f (-2, -1, 0, 1, 2), com x1< x2, temos f(x1) > f(x2). De modo prático, se o coeficiente a < 0 então a função do 1° grau é decrescente (no caso a = -3).

Considerações importantes:

1. Lembrando que o gráfico de uma função do 1° grau é uma reta, observamos que seu gráfico pode ser feito com base em apenas dois pontos.

2. O ponto onde o gráfico (reta) intercepta o eixo "x" é a raiz (ou zero) da função do 1° grau.

4.1.2 Características importantes da função do 1° grau

Conjunto domínio: o domínio da função do 1o grau é o conjunto dos números reais: D(f) = $\Re$.

Conjunto imagem: o conjunto imagem da função do 1o grau é o conjunto dos números reais: Im(f) = $\Re$.

Coeficiente angular: o coeficiente "a" é denominado coeficiente angular.

Coeficiente linear: o coeficiente "b" é denominado coeficiente linear.

A função do primeiro grau é crescente em $\Re$ quando a > 0 e decrescente em $\Re$ quando a < 0.

Exemplos:

a. Para a função f(x) = 2x + 4:

- o coeficiente angular "a" é o número 2
- o coeficiente linear "b" é o número 4

Como a >0, a função é crescente em $\Re$.

b. Para a função $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$:

- o coeficiente angular é o número $-\frac{2}{3}$
- o coeficiente linear é o número $\frac{1}{2}$

Como a < 0, a função é decrescente em $\Re$.

4.1.3 Casos particulares

Função linear: a função polinomial do 1o grau em que o termo "b" é nulo (b = 0) passa a ser chamada de função linear e tem a forma: f(x) = ax.

Exemplos:

- $y = 3x$
- $y = -\frac{2}{3}x$
- $y = x$
- $y = \sqrt{2}x$

Função identidade: a função polinomial do 1o grau em que o termo "b" é nulo (b = 0) e a = 1 passa a ser chamada de função identidade e tem a forma f(x) = x e a oposta da função identidade f(x) = -x.

Função constante: caso o termo a seja nulo (a = 0) na expressão f(x) = ax + b e b $\in \Re$, a função do 1o grau, passa a ser chamada função constante e tem a forma f(x) = b.

Exemplos:

- $f(x) = 5$
- $f(x) = \sqrt{7}$
- $y = 0$

4.1.4 Raiz ou zero da função polinomial do 1° grau

Dada a função do 1° grau y = f(x) = ax + b, chama-se *raiz* ou *zero* da função o valor de "x" que anula a função. Relembrando, graficamente a raiz é o ponto onde o gráfico intercepta o eixo x. Vejamos a forma de cálculo da raiz da função do 1° grau.

Sendo $y = f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, temos:

"x" é zero ou raiz de "f" $\Leftrightarrow$ $f(x) = 0$

De modo prático: igualamos a zero e resolvemos a equação do 1° grau.

Obs.: a função do 1º grau tem uma só raiz.

Exemplo:

Seja a função $y = 3x - 27$.

Para obtermos sua raiz ou zero, faremos $y = 0$.

$$3x - 27 = 0$$
$$3x = 27$$
$$x = \frac{27}{3}$$
$$x = 9$$

Assim, 9 é a raiz da função $y = 3x - 27$.

Vamos praticar juntos:

Considerando a função $f(x) = 3x + 1$, determinar:

a. os coeficientes angular e linear

Resposta:

coeficiente angular: $a = 3$.

coeficiente linear: $b = 1$

b. se a função é crescente ou decrescente

Resposta:

A função é crescente, pois $a = 3$ (positivo).

c. f(2) e f(-3)

Resposta: basta substituir "x" pelo valor dado na função.

$$f(x) = 3x + 1 \Rightarrow f(2) = 3 \cdot (2) + 1 \;\Rightarrow f(2) = 6 + 1 \Rightarrow f(2) = 7$$

$$f(x) = 3x + 1 \Rightarrow f(-3) = 3 \cdot (-3) + 1 \;\Rightarrow f(-3) = -9 + 1 \Rightarrow f(-3) = -8$$

d. Representação gráfica

Resposta: como já vimos, o gráfico de uma função do 1° grau é uma reta e para construí-lo bastam dois pontos quaisquer, por exemplo, 0 e 1.

Temos a tabela:

x	y = 3x +1	Ponto (x, y)
0	y = 3.(0) + 1= 0 + 1 = 1	(0, 1)
1	y = 3.(1) + 1 = 3 +1 = 4	(1, 4)

Gráfico:

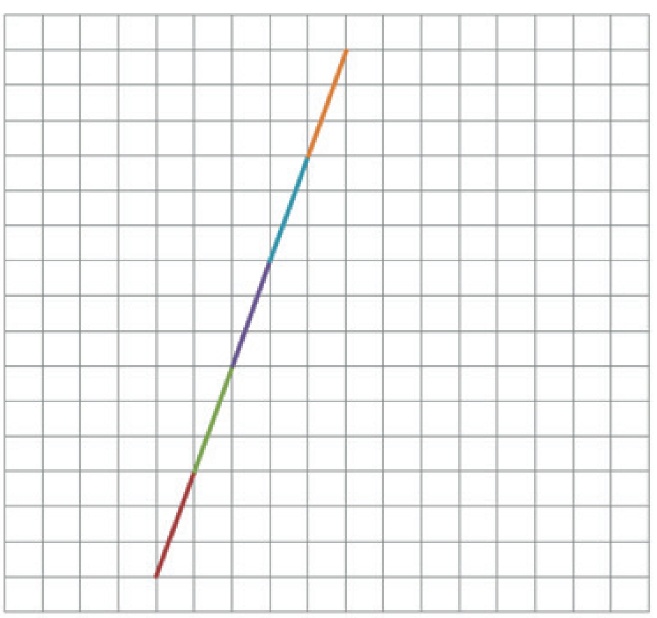


Figura 4
Fonte: autor

e. A raiz.

Resposta: igualando a zero

$$3x + 1 = 0$$
$$3x = -1$$
$$x = \frac{-1}{3}$$
$x = -0{,}33333$...(localize no gráfico)

Finalizamos os estudos sobre funções do 1° grau. Vamos agora às funções do 2° grau. Animado? Vamos lá!

4.2 Função quadrática ou do 2° grau

Agora que você já compreendeu a função de 1° grau vamos tratar da função quadrática ou do 2° grau. Para que você possa entendê-la melhor, vamos iniciar abordando sua representação gráfica.

O gráfico de uma função do 2° grau é uma curva plana denominada de **parábola**. A parábola é composta por dois ramos simétricos em relação a uma reta chamada de **eixo de simetria**. O ponto "V" da parábola é chamado de **vértice** da parábola. Veja a figura abaixo.

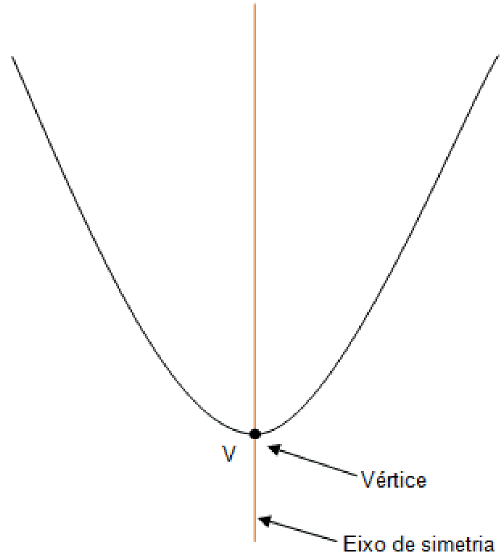


Figura 5
Fonte: autor

A parábola pode ser notada em várias situações, por exemplo:

- na antena parabólica;
- no lançamento de uma bola;
- no farol do carro: quando acendemos o farol, os raios de luz provenientes da lâmpada incidem num espelho parabólico e são refletidos paralelamente ao eixo de simetria.

Definição:

Chama-se função quadrática ou função do 2º grau a função f: $\Re \rightarrow \Re$ que associa a cada número real "x", o número real y = ax2 + bx + c, com "a", "b" e "c" reais e $a \neq 0$.

Exemplos:

- $f(x) = 2x^2 + 5x + 6$, onde a = 2, b = 5 e c = 6;
- $y = 3x^2 - x - 2$, onde a = 3, b = -1 e c = -2;
- $f(x) = - x^2 + x - 1$, onde a = - 1, b = 1 e c = - 1;
- $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{5}$, onde $a = \frac{3}{2}$, b = 0 e $c = \sqrt{5}$

4.2.1 Gráfico da função quadrática

Como já vimos, o gráfico de uma função quadrática é representado por uma curva à qual damos o nome de parábola.

Vamos esboçar o gráfico das seguintes funções quadráticas:

a) $y = x^2 - 2x - 3$

Para isso, atribuímos valores para "x" e obtemos valores para "y", organizando-os com o auxílio de uma tabela.

x	y = x² - 2x – 3	Ponto (x,y)
-2	$y = (-2)^2 - 2.(-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$	(-2, 5)
-1	$y = (-1)^2 - 2.(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$	(-1, 0)
0	$y = (0)^2 - 2.(0) - 3 = 0 + 0 - 3 = -3$	(0, -3)
1	$y = (1)^2 - 2.(1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$	(1, -4)
2	$y = (2)^2 - 2.(2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$	(2, -3)
3	$y = (3)^2 - 2.(3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$	(3, 0)
4	$y = (4)^2 - 2.(4) - 3 = 16 - 8 - 3 = 5$	(4, 5)

Veja o gráfico representado no plano cartesiano.

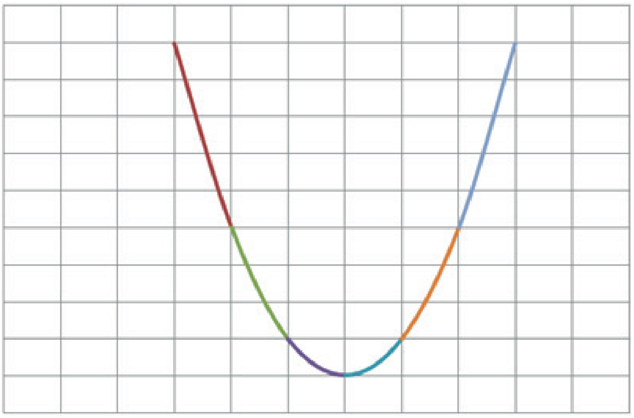


Figura 6
Fonte: autor

b) $y = - x^2 + 2x + 8$

Construímos a tabela:

x	y = - x² + 2x + 8	Ponto (x,y)
-2	$y = - (-2)^2 + 2.(-2) + 8 = - 4 - 4 + 8 = 0$	(-2, 0)
-1	$y = - (-1)^2 + 2.(-1) + 8 = - 1 - 2 + 8 = 5$	(-1, 5)
0	$y = - (0)^2 + 2.(0) + 8 = 0 + 0 + 8 = 8$	(0, 8)
1	$y = - (1)^2 + 2.(1) + 8 = - 1 + 2 + 8 = 9$	(1, 9)
2	$y = - (2)^2 + 2.(2) + 8 = - 4 + 4 + 8 = 8$	(2, 8)
3	$y = - (3)^2 + 2.(3) + 8 = - 9 + 6 + 8 = 5$	(3, 5)
4	$y = - (4)^2 + 2.(4) + 8 = - 16 + 8 + 8 = 0$	(4, 0)

Veja o gráfico

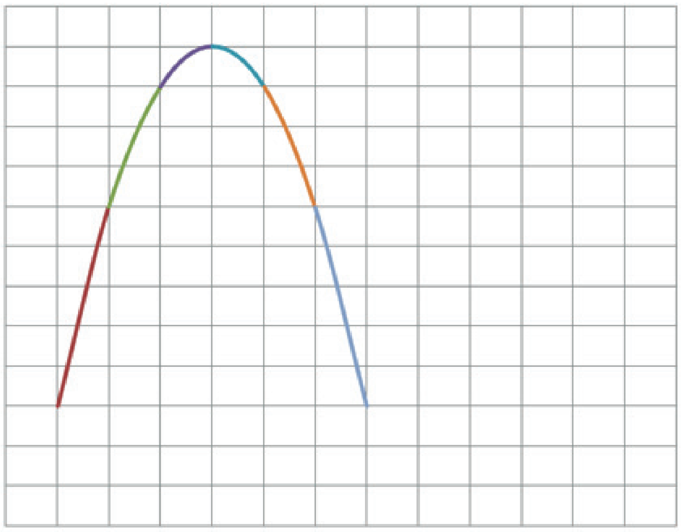


Figura 7
Fonte: autor

Obs.: os valores atribuídos a "x" são aleatórios, entretanto, para uma boa visualização da parábola escolhemos valores de "x" em torno da posição "x" do vértice (no caso dos itens a e b $x_v = 1$) como veremos mais adiante.

4.2.2 Relação entre a concavidade de uma parábola e o coeficiente "a"

O gráfico de uma função quadrática é sempre uma parábola e essa parábola terá a concavidade voltada para cima quando $a > 0$ (exemplo a) e terá a concavidade voltada para baixo quando $a < 0$ (exemplo b).

Exemplos:

Determine a concavidade do gráfico das seguintes funções quadráticas (parábolas):

a) $y = x^2 - 2x - 3$ resposta: concavidade voltada para cima $a = 1$.

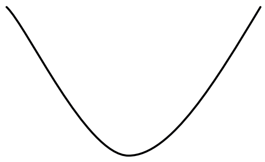


Figura 8
Fonte: autor

Para mais detalhes veja o gráfico do exemplo a.

b) $y = -x^2 + 2x + 8$ resposta: concavidade voltada para baixo $a = -1$.

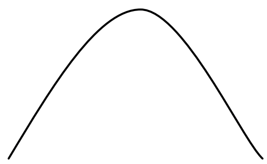


Figura 9
Fonte: autor

Para mais detalhes veja o gráfico de exemplo b.

c) $y = -2x^2 + 5x - 7$ resposta: concavidade voltada para baixo $a = -2$.

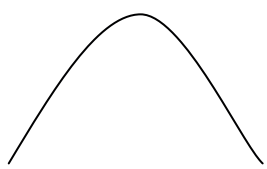


Figura 10
Fonte: autor

d) $y = \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{5}x - \frac{1}{2}$ resposta: concavidade voltada para cima $a = \frac{3}{4}$

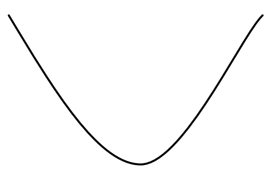


Figura 11
Fonte: autor

4.2.3 Raízes ou zeros da função quadrática

Para encontrarmos as raízes (ou zeros) da função quadrática, fazemos ax2 + bx + c igual a zero, isto é, y = f(x) = 0. Em algumas situações não é possível encontrar raízes reais para a função do 2º grau. Você verá mais adiante.

Para fazer referência a essas raízes, costumamos usar símbolos, tais como x' e x" ou x1 e x2.

Então, se y = 0, temos que ax2 + bx + c = 0.

A fórmula resolutiva da equação do 2° grau, conhecida como Fórmula de Bháskara nos fornece $x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, mas devemos considerar os casos em que o discriminante (Δ) seja:

- $\Delta > 0$

Neste caso a função tem raízes reais e diferentes, portanto a parábola determina dois pontos distintos no eixo dos "x": (x', 0) e (x", 0).

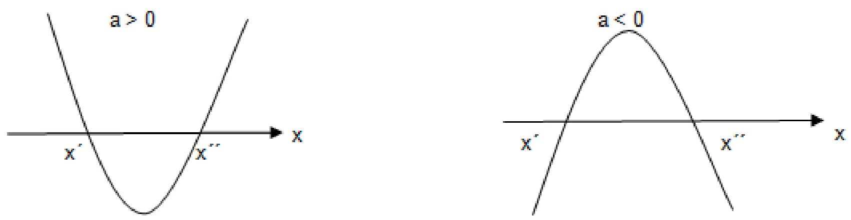


Figura 12
Fonte: autor

- $\Delta = 0$

Neste caso a função tem raízes reais e iguais : x' = x", portanto a parábola tangencia o eixo dos "x".

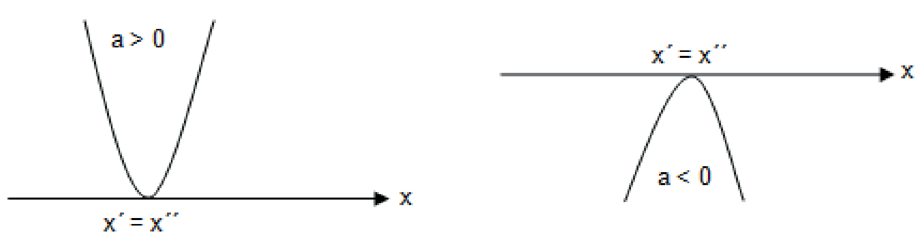


Figura 13
Fonte: autor

- $\Delta < 0$

Neste caso a função não tem raízes reais, portanto a parábola não determina nenhum ponto no eixo dos x.

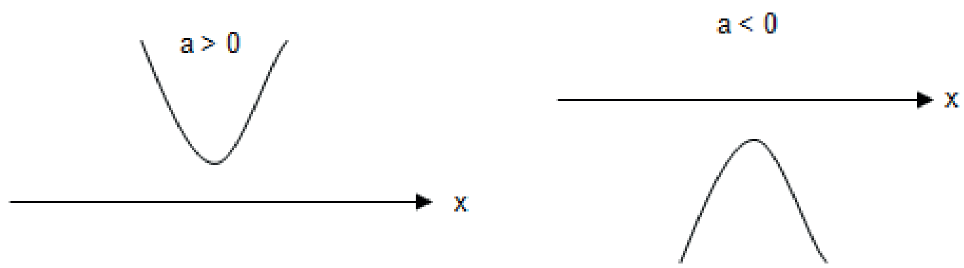


Figura 14
Fonte: autor

4.2.4 Vértice da parábola

O vértice da parábola pertence ao eixo de simetria. As coordenadas do vértice são dadas pelas seguintes fórmulas:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Vamos fazer um estudo do vértice:

- Se a parábola está voltada para cima **(a > 0)**, então o **vértice** é um **ponto de mínimo** da função e o menor valor que a função atinge é dado pelo y_v .

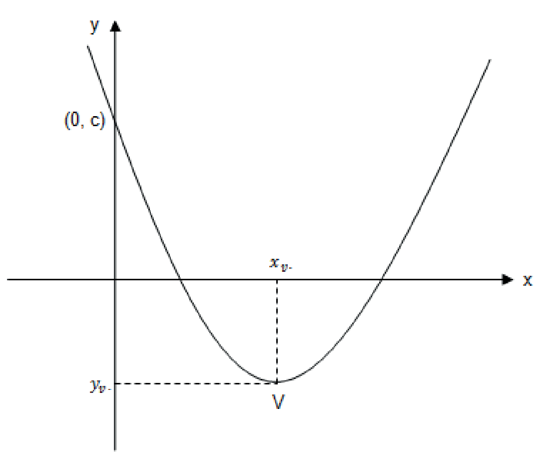


Figura 15
Fonte: autor

- Se a parábola está voltada para baixo **(a < 0)**, então o vértice é um **ponto de máximo** da função e o maior valor que a função atinge é dado pelo y_v .

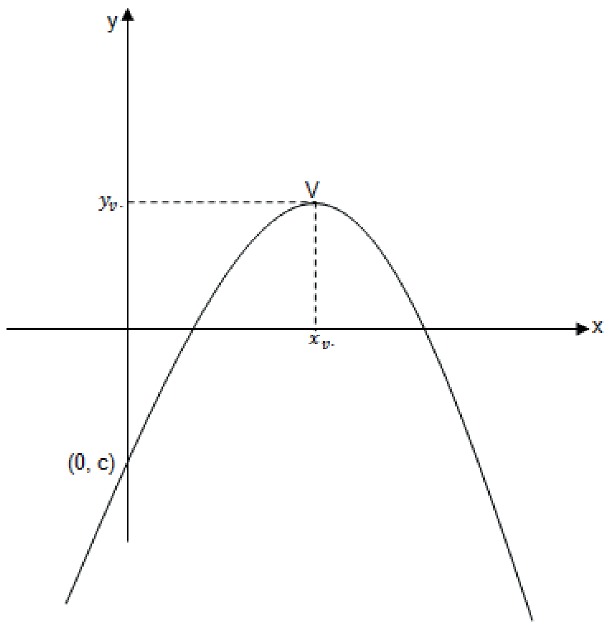


Figura 16
Fonte: autor

Exemplo:

1. Faça um esboço do gráfico da função y = x² - 6x +5 determinando:

a) as raízes

$x^2 - 6x + 5 = 0$

a = 1, b = 6, c = 5

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x' = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x'' = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Resposta: as raízes são 1 e 5

b) as coordenadas do vértice;

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4 \cdot 1} = -\frac{16}{4} = -4$$

c) a classificação do vértice (ponto de máximo ou mínimo);

O vértice é um ponto de mínimo da função, pois a = 2 (positivo) e o menor valor que a função atinge é $y_v = -4$.

d) intersecção da curva com o eixo y.

A parábola intercepta o eixo y no ponto (0, c) = (0, 5)

Vejamos o gráfico:

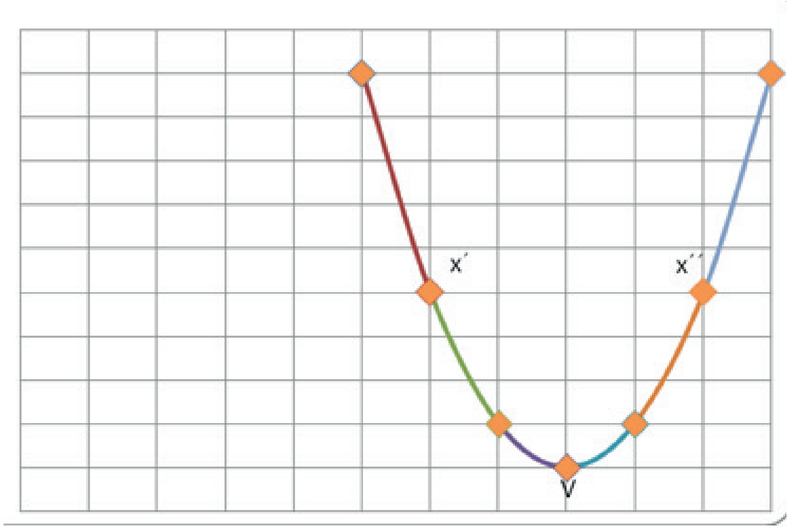


Figura 17
Fonte: autor

2. O custo diário da produção de uma indústria de aparelhos de telefone é dado pela função $C(x) = x^2 - 86x + 2.500$, onde "C(x)" é custo em reais e "x" é o número de unidades fabricadas. Pergunta-se:

a. Quantos aparelhos devem ser produzidos diariamente para que o custo seja mínimo?

Resposta:

A função custo "C(x)" é do 2º grau com coeficiente a = 1 (positivo), então a parábola terá concavidade voltada para cima e o vértice será um ponto de mínimo da função "C(x)". Desse modo o número de aparelhos produzidos com custo mínimo será dado por: $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-86)}{2 \cdot 1} = \frac{86}{2}$ = 43 aparelhos

b. Qual é o valor mínimo do custo?

Resposta:

O valor mínimo do custo será dado por $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$

$\Delta = b2 - 4ac = (-86)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2500 = -2604$

$y_v = -\frac{(-2604)}{4 \cdot 1} = \frac{2604}{4} = 651$

Custo mínimo é de R$ 651,00.

Espero que você tenha entendido os conteúdos abordados. Caso persista alguma dúvida volte aos conteúdos para estudá-los novamente.

Resumo

Nesta aula fizemos um estudo sobre as funções do 1º e do 2º grau. Apontamos que a função do 1º grau é definida por f(x) = ax + b, onde os coeficientes "a" e "b" são números reais e a ≠ 0. Mostramos que para calcular a raiz ou zero da função basta igualar f(x) a zero e resolver a equação do 1º grau ax + b = 0. Vimos também como representar uma função do 1º grau graficamente.

A seguir estudamos a função do 2º grau definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ (forma reduzida). Com a, b e c números reais e "a" é diferente de zero. Mostramos que o gráfico da função de 2º grau é uma curva chamada parábola e que o sinal do coeficiente "a" determina se a concavidade da parábola está voltada para cima ou para baixo.

Comentamos que para calcular a raiz da função (ou zero de função) do 2º grau basta igualar F(x) a zero e resolver a equação do 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$ (usando Bháskara). Também foram mostradas as fórmulas para o cálculo das coordenadas do vértice da parábola e que os pontos de máximo e mínimo são obtidos calculando o valor da ordenada do vértice. Por último, aplicamos os conceitos de função na resolução de problemas. Vamos praticar!

Atividades de aprendizagem

1. Considere a função do 1° grau $h(x) = 4x – 20$ e determine:

a) os coeficientes angular e linear;

b) se a função é crescente ou decrescente;

c) h(2) e h(-6);

d) a raiz;

e) representação gráfica.

2. Com relação à função $y = -x^2 + x + 6$ determine:

a) as raízes;

b) as coordenadas do vértice;

c) a concavidade da parábola;

d) se o vértice é ponto de máximo ou mínimo;

e) a intersecção da parábola com o eixo y;

f) faça um esboço do gráfico.

3. Na produção de um determinado objeto, uma empresa gastou R$ 400,00 com o molde da peça e mais R$ 2,00 por peça produzida. Nessa situação, determine:

a) Chamando de "x" o número de peças produzidas e "C(x)" a função custo, encontre "C(x)".

b) Calcule o custo para produzir 300 peças.

4. Sabe-se que, sob certo ângulo de tiro, a altura atingida por uma bala, em metros, em função do tempo, em segundos, é dada por $h(t) = -20t^2 + 200t$. Nessa situação, pergunta-se:

a) Qual a altura máxima atingida pela bala?

b) Em quanto tempo após o tiro a bala atinge a altura máxima?

Caro (a) estudante,

Chegamos ao final de nossa quarta aula. Estudamos função do 1° e função do 2° grau. Espero que tenha gostado. A reta e a parábola são bastante interessantes, com várias aplicações. Não deixe de fazer as atividades propostas.

Vamos para a quinta aula. Nela demonstraremos Exponencial e Logaritmos. Procure relembrar as potências, os cálculos e suas propriedades para facilitar o entendimento do conteúdo que virá. Fique atento ao exemplo em que o logaritmo é usado para resolver um problema da Matemática Financeira.

Lembre-se: o seu processo de aprendizagem, embora nunca termine, depende da sua dedicação e interesse em continuar buscando novos conhecimentos.

Aula 5. Exponencial e logaritmo

Objetivos:

- reconhecer uma função exponencial e suas propriedades;
- distinguir uma função logarítmica e suas propriedades;
- identificar os gráficos exponenciais e logarítmicos; e
- aplicar os conceitos de exponencial e logaritmo na resolução de problemas.

Caro (a) estudante,

Nesta aula vamos desenvolver dois temas bastante interessantes da matemática: Exponencial e Logaritmo. Para Youssef, Soares, Fernandez (2008), o cálculo exponencial e os logaritmos surgiram a partir das necessidades impostas pela evolução da ciência e da intensificação das operações comerciais. Vamos procurar desenvolver essa aula seguindo a proposta dos autores citados acima.

Procure rever na primeira aula o tema potenciação, pois irá auxilia-lo no entendimento desta aula. Vamos apresentar as definições, propriedades, exemplos e aplicações. Esteja atento à aplicação dos Logaritmos na Matemática Financeira. Lembre-se que a Matemática Financeira é uma de suas próximas disciplinas. Vamos aos estudos.

5.1 Exponencial

Para iniciar os estudos referentes a esta unidade convém que você repasse a aula 1 que tratou de potências e radicais. É muito importante que você tenha compreendido aquela aula para poder prosseguir na temática que abordaremos agora.

5.1.1 Conceituação

O termo exponencial na Matemática se refere a toda expressão em que a variável se apresenta no expoente de uma potência. Creio que você já deve ter visto a expressão "crescimento exponencial". Nesta aula você verá a razão dessa expressão. Mas antes vamos conceituar exponencial.

Dá-se o nome de **função exponencial de base "a"**, a uma função f de $\Re$ em R^*_+ , tal que $f(x) = a^x$, onde a é um número real dado, a >0 e a ≠ 1 .

Exemplos: a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = 5^x$ c) $f(x) = (0,2)^x$ d) $f(x) = (1,3)^x$

5.1.2 Gráfico da função exponencial

a) Vamos construir o gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$

Atribuímos valores a "x" e montamos a seguinte tabela:

X	y = 2^x
-3	y= $(2)^{-3} = \frac{1}{8}$
-2	y= $(2)^{-2} = \frac{1}{4}$
-1	y= $(2)^{-1} = \frac{1}{2}$
0	y= $(2)^0 = 1$
1	y= $(2)^1 = 2$
2	y= $(2)^2 = 4$
3	y= $(2)^3 = 8$

Assim, temos o seguinte gráfico:

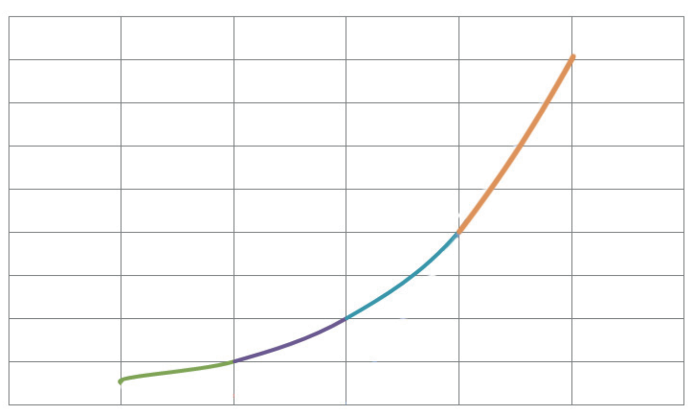


Figura 18
Fonte: autor

Observe que neste caso a função é crescente ($x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$)

b) Vamos construir o gráfico da função exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Atribuímos valores a "x" e montamos a seguinte tabela:

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$
-2	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
-1	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
0	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$
1	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$
2	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$
3	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$

Assim, temos o seguinte gráfico:

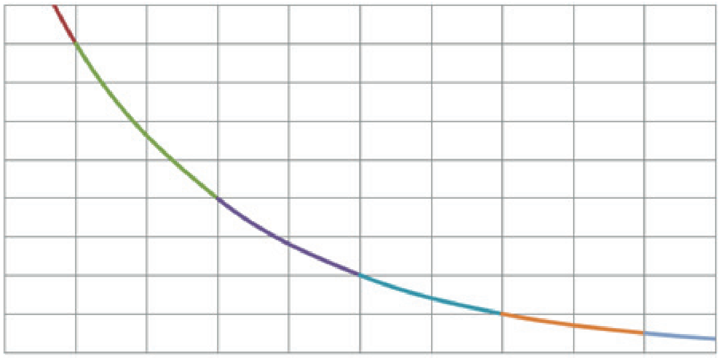


Figura 19
Fonte: autor

Observe que neste caso a função é decrescente ($x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$).

De modo geral, podemos concluir que, sendo $f(x) = a^x$ tem-se:

a) Se $a > 1$, tem-se uma função crescente (exemplo a).

b) Se 0< a < 1, tem-se uma função decrescente (exemplo b).

c) Se x = 0 tem-se f(0) = 1, isto é, o gráfico sempre intercepta o eixo y no ponto (0,1).

Veja os gráficos das funções $f(x) = 2^x$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x) = 3^x$ e $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

representados em um mesmo referencial cartesiano:

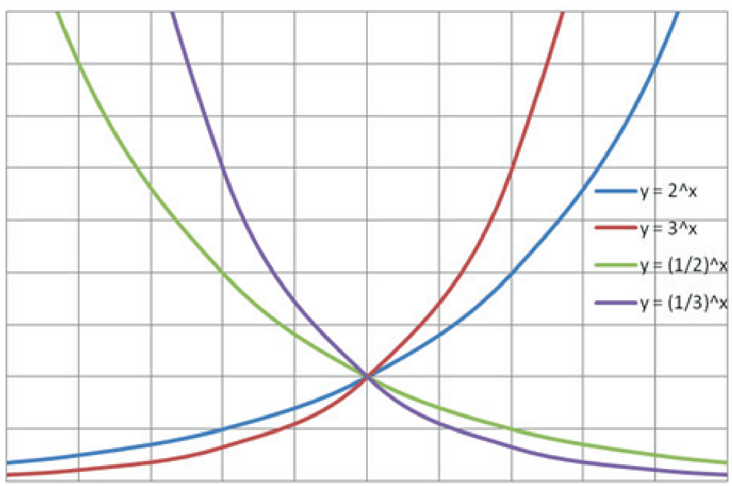


Figura 20
Fonte: autor

Observe que todos gráficos passam pelo ponto (0, 1).

5.1.3 Equação exponencial

Definição: toda equação em que a incógnita aparece como expoente de uma ou mais potências de base positiva e diferente de 1 é chamada de equação exponencial.

Exemplos:

a) $2^x = 8$ b) $5^{2x} + 5^x = 30$ c) $5^x = 2$

A resolução de uma equação exponencial baseia-se na seguinte propriedade:

Exemplos:

$* \ a^x = a^y \iff x = y \ , \quad para \quad a > 0 \ e \ a \neq 1.$

Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 8$

Vamos utilizar a decomposição em fatores primos do número 8 para obtermos bases iguais e aplicar a propriedade descrita acima.

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \Rightarrow 8 = 2^3 \\ 1 & \end{array}$$

Assim, temos: $2^x = 2^3$ (bases iguais)

então $x = 3$

b) $125^x = 625$

Neste exemplo, vamos decompor os números 125 e 625.

$$\begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \Rightarrow 125 = 5^3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \Rightarrow 625 = 5^4 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Assim, temos

$125^x = 625$

$5^{3x} = 5^4$ (bases iguais)

$3x = 4$

$x = \dfrac{4}{3}$

5.1.4 Aplicações – exponenciais

Vejamos algumas aplicações das funções exponenciais:

1) O número de bactérias de uma cultura, "t" horas após o início de certo experimento, é dado pela expressão $N(t) = 1200 \cdot 2^{0,4t}$. Nessas condições, quanto tempo após o início do experimento a cultura terá 38.400 bactérias?

Resolução

$$N(t)=1200\cdot 2^{0,4t}=38400$$

$$2^{0,4t}=\frac{38400}{1200}$$

$$2^{0,4t}=32$$

Como

$$\begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 32 = 2^5$$

temos:

$$2^{0,4t} = 2^5 \text{(bases iguais)}$$

$$0,4t = 5$$

$$t = \frac{}{0,4}$$

$$t = 12,5 \text{ horas}$$

Resposta: Teremos 38.400 bactérias após 12,5 horas (12h30min) do início do experimento.

2) Chamamos de montante "**M**" a quantia que uma pessoa deve receber após aplicar um capital "**C**", a juros compostos, a uma taxa "i" (decimal) durante um tempo "t". O montante pode ser calculado pela fórmula $M = C\cdot(1+i)^t$. Supondo que o capital aplicado é de R$ 200.000,00 a uma taxa de 12% ao ano durante 3 anos, qual o montante no final da aplicação?

Resolução:

Dados: Capital: C = 200.000,00

Taxa: i = 12% = 0,12 (usar a forma decimal)

Período: t = 3 anos.

$M = 200000 \cdot (1+0,12)^3$

$M = 200000 \cdot (1,12)^3$

$M = 200000 \cdot 1,404928$

$M = 280.985,60$

Resposta: o montante no final da aplicação será de R$ 280.985,60

5.2 Logaritmo

Agora que você já estudou as funções exponenciais, vamos entrar nas funções logarítmicas. Você vai perceber a relação entre exponencial e logaritmo. Na verdade, calcular um logaritmo é encontrar um expoente. Veja a definição a seguir.

Podemos definir logaritmo como:

Sejam "a" e "b" números reais positivos e $b \neq 1$. Chama-se logaritmo de "a" na base "b" o expoente "x" tal que $b^x = a$

$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$: condição de existência: $b > 0$ e $b \neq 1$, $a > 0$

Onde: "a" é o logaritmando;

"b" é a base;

"x" é o logaritmo de "a" na base "b".

Exemplo: Calcule os seguintes logaritmos.

a) $\log_2 8$

Resolução:

$\log_2 8 = x \Leftrightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

Obs.: lembre-se de que $8 = 2^3$ (decomposição em fatores primos)

Então, $\log_2 8 = 3$

b) $\log_2 243$

Resolução:

$$\log_3 243 = x \Leftrightarrow 3^x = 243 \Rightarrow 3^x = 3^5 \Rightarrow x = 5$$

Obs.: lembre-se de que $243 = 3^5$

Então, $\log_3 243 = 5$

c) $\log_7\left(\frac{1}{49}\right)$

Resolução:

$$\log_7\left(\frac{1}{49}\right) = x \Leftrightarrow 7^x = \frac{1}{49} \Rightarrow 7^x = 49^{-1} \Rightarrow 7^x = (7^2)^{-1}$$

$$7^x = 7^{-2} \Rightarrow x = -2$$

Obs.: lembre-se da potência de expoente negativo (unidade 1).

Então, $\log_7\left(\frac{1}{49}\right) = -2$

d) $\log 1000$

Obs.: quando a base do logaritmo for 10 podemos omiti-la. Assim $\log 1000 = \log_{10} 1000$

Resolução:

$$\log 1000 = x \Rightarrow 10^x = 1000 \Rightarrow 10^x = 10^3 \Rightarrow x = 3$$

Então. $\log 1000 = 3$.

5.2.1 Propriedades dos logaritmos

Para resolver equações logarítmicas precisamos conhecer um pouco mais sobre algumas propriedades dos logaritmos. Vejamos:

a) $\log_a a^n = n$ para $a > 0$ e $a \neq 1$

b) $\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$ com $x > 0, y > 0, a > 0$ e $a \neq 1$

c) $\log_a(M.N) = \log_a M + \log_a N$ com $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$ e $N > 0$

d) $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N,\quad \text{com}\quad M > 0, N > 0, a \neq 1 \text{ e } a > 0$

e) $\log_a M^N = N \cdot \log_a M$ com $N > 0$, $M > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$

f) Mudança de base

$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$ com as condições de existência dos logaritmos respeitadas.

Exemplo:

Sabendo que log 2 = 0,3010 e log3 = 0,4771, aplique as propriedades dos logaritmos e calcule:

a) log8

$$\log 8 = \log 2^3 \overset{propried.(s)}{\Longrightarrow} \log 8 = 3 \cdot \log 2 = 3 \cdot 0{,}3010 = 0{,}903$$

b) log12

$$\log 12 = \log(2^2 \cdot 3) \overset{propried.(c)}{\Longrightarrow} \log 12 = \log 2^2 \cdot \log 3 \overset{propried.(s)}{\Longrightarrow} \log 12 = 2 \cdot \log 2 + \log 3$$

Assim, $\log 12 = 2 \cdot \log 2 + \log 3 = 2 \cdot 0{,}3010 + 0{,}4771 = 0{,}602 + 0{,}4771 = 1{,}0791$

c) log0,54

$$\log 0{,}54 = \log\left(\frac{54}{100}\right) \overset{propried.(d)}{\Longrightarrow} \log 54 - \log 100 = \log(2 \cdot 3^3) - \log 10^2 \overset{propried.(c)}{\Longrightarrow} \log 2 +$$

$$\log 3^3 - \log 10^2 \overset{propried.(s)}{\Longrightarrow} \log 2 + 3 \cdot \log 3 - 2 \cdot \log 10$$

Temos $\log 0{,}54 = \log 2 + 3 - 2 \cdot \log 10 = 0{,}3010 + 3 \cdot 0{,}4771 - 2 \cdot 1$

$\log 0{,}54 = -0{,}2677$

d) $\log_6 4$

Neste caso precisamos recorrer a uma mudança de base, já que os dados estão na base 10.

$$\log_6 4 = \frac{\log 4}{\log 6} \text{(aplicando a mudança de base propriedade (f))}$$

$$\log_6 4 = \frac{\log 4}{\log 6} = \frac{\log_2 2}{\log(2\cdot 3)} = \frac{2\cdot \log 2}{\log 2 + \log 3} = \frac{2\cdot 0{,}3010}{0{,}3010+0{,}4771} = \frac{0{,}602}{0{,}7782} = 0{,}7736$$

Você pôde verificar as propriedades dos logaritmos e utilizar em alguns cálculos. No próximo item vamos utilizar as propriedades para resolver equações.

5.2.2 Equações logarítmicas

São equações em que a incógnita se apresenta no logaritmando ou na base de um logaritmo. Exemplo:

$a.)\ \log_2 x = 6 \qquad b)\ \log_x(x+6) = 2 \qquad c)\ \log_3(x+7) + \log_3(x-1) = 2$

Para resolvê-las usamos a propriedade (b) dos logaritmos verificando sempre a **condição de existência (CE)** dos logaritmos. Vejamos:

Resolva as seguintes equações logarítmicas:

a) $\log_2 x = 6$

CE. $x > 0$

$\log_2 x = 6 \Leftrightarrow x = 2^6 \Rightarrow x = 64$ como $64 > 0$, então $S = \{64\}$

b) $\log_x(x + 6) = 2$

CE. logaritmando: $x + 6 > 0 \Rightarrow x > -6$ e base $1 \neq x > 0$

Assim, concluímos pela CE que $x > 0$ e $x \neq 1$ e resolvemos como segue.

$\log_x(x + 6) = 2 \Leftrightarrow x^2 = x + 6$ logo temos a seguinte equação do 2° grau $x^2 - x - 6 = 0$

Aplicando a fórmula de Bháskara com $a = 1$, $b = -1$ e $c = -6$, temos:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$

raízes: $x' = \dfrac{1+5}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ e

$x'' = \dfrac{1-5}{2} = -\dfrac{4}{2} = -2$(não convém pois contraria a CE $x > 0$)

$S = \{3\}$

c) $\log_3(x + 7) + \log_3(x - 1) = 2$

CE $x + 7 > 0 \Rightarrow x > -7$ e $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

Assim, concluímos que pela CE $x > 1$ (intersecção entre as duas CE) e podemos resolver usando a propriedade (c) dos logaritmos (log do produto é igual ao log da soma).

$\log_3(x + 7) + \log_3(x - 1) = 2$

$\log_3 [(x + 7) \cdot (x - 1)] = 2$

$(x + 7) \cdot (x - 1) = 3^2$

$x^2 - x + 7x - 7 = 9$

x2 + 6x - 7 - 9 = 0

x2 + 6x - 16 = 0

a = 1, b = 6 e c = 16

$\Delta = 100$

$x' = \dfrac{-6 \pm 10}{2}$

$x' = \dfrac{-6+10}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

$x'' = \dfrac{-6-10}{2} = -\dfrac{16}{2} = -8$ (não satisfaz CE)

$S = \{2\}$

5.2.3 Função logarítmica

Antes de definir função logarítmica dê uma relembrada na aula 4 onde apresentamos conceito de função. Agora vamos estender o conceito de função para o caso dos logaritmos.

Definição: Considere a função exponencial $y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. A sua inversa chama-se função logarítmica e indica-se por: $y = \log_a x \quad com\ a \in \mathbb{R}_+^* \ e\ b \neq 1.$

5.2.3.1 Gráfico da função logarítmica

Para construir o gráfico da função logarítmica atribuímos valores reais positivos a "x" e calculamos "y". Em seguida montamos o gráfico em um referencial cartesiano. Veja os exemplos:

a) $y = \log_2 x$

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

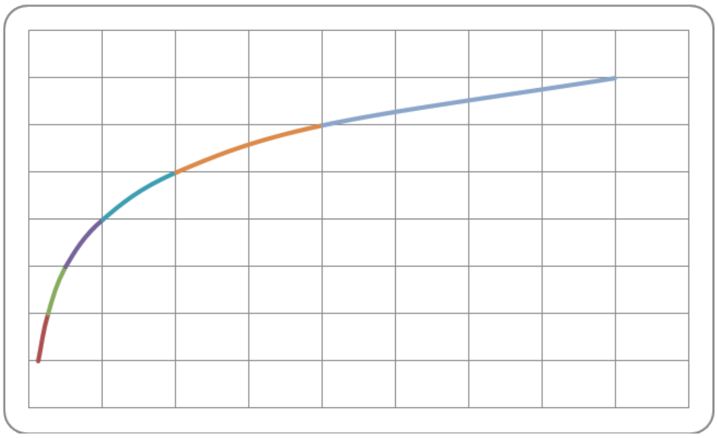


Figura 21
Fonte: autor

É fuma função crescente em todo o seu domínio. Na prática, se a base for maior que 1, a função será sempre crescente.

b) $\log_{\frac{1}{2}} x$

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2
8	- 3

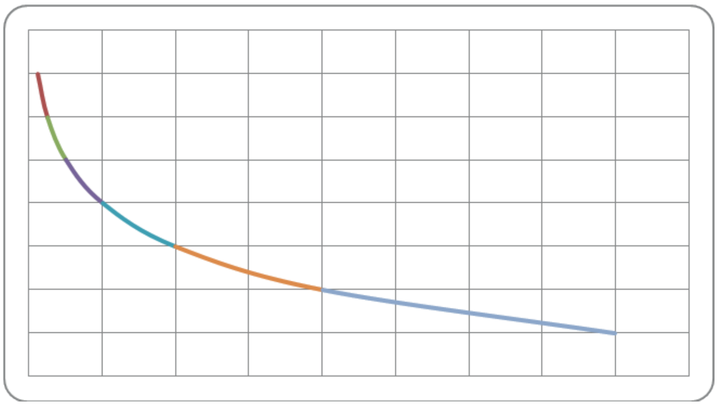


Figura 22
Fonte: autor

É uma função decrescente em todo o seu domínio. Na prática, se a base for maior que 0 e menor que 1, a função logarítmica será sempre decrescente.

5.2.4 Aplicações - logaritmos

Observe uma aplicação na Matemática Financeira:

A quantia de R$ 20.000,00 foi aplicada a uma taxa de 1% ao mês (no regime de juros compostos). Utilize as fórmulas apresentadas na aplicação 2 (função exponencial) e uma calculadora científica.

a) Qual será o saldo no final de 3 meses?

Dados: Capital: C = 20.000,00

Taxa: i = 1% = 0,01 (usar a forma decimal)

Período: t = 3 meses.

$M = 20000 \cdot (1 + 0{,}01)^3$

$M = 20000 \cdot (1{,}01)^3$

$M = 20000 \cdot 1{,}030301$

$M = 20606{,}02$

Resposta: ao final de 3 meses o montante será de R$ 20.606,02

b) Por quantos meses deve ser feita a aplicação para que o saldo seja de R$ 32.210,20?

Dados: Capital: C = 20.000,00

Taxa: i = 1% = 0,01

Montante: M = 32.210,20

Período: t

$M = C \cdot (1 + i)^t$

$20000 \cdot (1 + 0{,}01)^t = 32210{,}20$

$$(1{,}01)^t = \frac{32210{,}20}{20000}$$

$(1{,}01)^t = 1{,}61051$ (para resolver a equação aplicamos log nos dois membros da equação)

$\log(1{,}01)^t = \log 1{,}61051$ (utilizamos a propriedade (b) dos logaritmos)

$t \cdot \log(1{,}01) = \log 1{,}61051$

$$t=\frac{\log 1{,}61051}{\log 1{,}01}$$

$$t=\frac{0{,}206963425}{0{,}004321373}$$

t = 47,89297869 meses

t = 48 meses (por aproximação)

Resposta: a aplicação deve ser feita por um período de 48 meses.

Vejamos um modo mais prático para resolver o item b) do exercício anterior.

Quando queremos calcular o tempo (t) na fórmula de juros compostos podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$t=\frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1+i)}$$

Vamos relembrar os dados do exercício:

M = R$ 32.210,20 (Montante obtido)

C = R$ 20.000,00 (Capital investido)

i = 1 % a.m. (ao mês) = 0,01

$$t=\frac{log\left(\frac{32210{,}20}{20000{,}00}\right)}{log(1+0{,}01)}=\frac{log\ (1{,}61051)}{\log\ (1{,}01)}=\frac{0{,}206963425}{0{,}004321373}=47{,}89297869\ meses$$

Ou seja, t = 48 meses

Utilize uma calculadora para facilitar os cálculos.

Resumo

Esta aula oportunizou-lhe o conhecimento de uma função exponencial f(x) = a^x, onde a é um número real dado, a >0 e , e suas propriedades. Resolvemos equações exponenciais simples utilizando a fatoração e vimos a representação gráfica da função exponencial. Observamos que a função é crescente quando temos "a>1" e decrescente quando 0<a<1. Aplicamos conceitos de exponencial na resolução de problemas.

A seguir tratamos da função logarítmica, inversa da exponencial, suas propriedades e a representação gráfica. Vimos que calcular um logaritmo significa calcular um expoente. Em seguida aplicamos os conceitos adquiridos na resolução de problemas.

Antes de iniciarmos nossa última aula sugiro que você realize as atividades de aprendizagem.

Atividades de aprendizagem

1. Classifique as seguintes funções exponenciais em crescente ou decrescente:

a) $y = 5^x$

b) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

2. Resolva as equações exponenciais:

a) $64^x = 256$

b) $9^{(2x-1)} = 27^{(x+1)}$

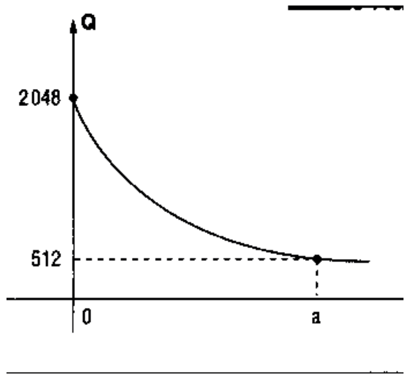
3. O número de bactérias de uma cultura, "t" horas após o início de certo experimento é dado pela expressão $N(t) = 800 \cdot 3^{0,5t}$. Nessas condições, determine:

a) A população inicial de bactérias (t = 0);

b) A população de bactérias após 2 horas de experimento;

c) Quanto tempo após o início do experimento a cultura terá 64.800 bactérias?

4. Uma substância se decompõe aproximadamente segundo a lei $Q(t) = k \cdot 2^{-0,5t}$, em que "k" é uma constante, "t" indica o tempo (em minutos) e "Q(t)" indica a quantidade de substância (em gramas) no instante "t".



Considerando-se os dados desse processo de decomposição mostrados no gráfico, determine os valores de "k" e de "a".

5. Classifique as seguintes funções logarítmicas em crescente ou decrescente:

a) $y = \log_5 x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{8}}(x + 5)$

6. Calcule os logaritmos:

a) $\log_{25} 625$

b) $\log_9 \left(\dfrac{1}{243}\right)$

7. Sendo $\log 5 = 0,69$ e $\log 3 = 0,47$ calcule:

a) $\log 15$

b) $\log 75$

8. Resolva a equação logarítmica $\log_3(6x - 9) = 4$

9. A fórmula para o cálculo do montante "M" de um capital "C" aplicado em um período "n" (dias, meses, anos,...) a uma taxa "i" por unidade de tempo é dada por $M = C \cdot (1 + i)^n$, como visto no exemplo 2 (função exponencial). Encontre o tempo que um capital inicial de R$ 10.000,00 deve ser aplicado para se obter um montante de R$ 13.400,00 a uma taxa de 5% ao mês (dados: $\log 1{,}34 = 0{,}12$ e $\log 1{,}05 = 0{,}02$)

Prezado (a) estudante,

Chegamos ao final de nossa quinta aula. Sugiro que você repasse a aula, refaça os exemplos e procure verificar seus conhecimentos nas atividades de aprendizagem. Veja também um pouco mais sobre a utilização da calculadora científica.

Agora que você já concluiu a quinta aula, vamos para a nossa última aula. Vamos estudar dois teoremas importantes da Matemática: Teorema de Pitágoras e Teorema de Tales. Neste último, vamos recordar um pouco sobre proporção. Aproveite e reveja a aula 2.

Vamos à sexta aula e lembre-se que a chave para o sucesso está em seus estudos e na sua dedicação.

Aula 6. Teorema de Pitágoras, teorema de Tales e área de figuras planas

Objetivos:

- reconhecer um triângulo retângulo;
- identificar os lados em um triângulo retângulo;
- utilizar o Teorema de Pitágoras em situações-problema;
- aplicar o Teorema de Tales na resolução de problemas; e
- calcular a área de figuras planas.

Caro (a) estudante,

Nesta aula estudaremos os seguintes temas: Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales e Área de Figuras Planas. Nesta aula vamos nos dedicar ao estudo de alguns tópicos da Geometria. Trataremos de algumas figuras geométricas e suas propriedades. Você vai poder perceber as várias aplicações do Teorema de Pitágoras e do Teorema de Tales. Vamos desenvolver a aula apresentando definições e conceitos. Em seguida mostraremos suas propriedades e alguns exemplos e, por fim, você poderá fixar este conteúdo acompanhando e refazendo os exercícios e aplicações. Bom estudo!

6.1 Teorema de Pitágoras

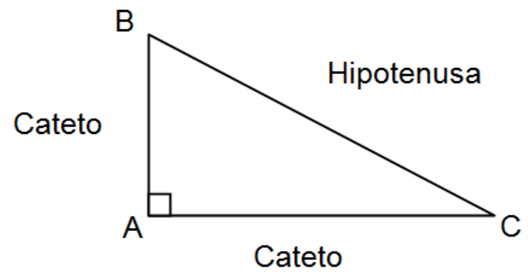
Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C. na ilha de Somos, no mar Egeu. A ele se credita um dos mais importantes teoremas da matemática. Vamos seguir a proposta de Iezzi, Dolce, Machado (2009) para desenvolver esse tópico.

Iniciaremos o estudo do Teorema de Pitágoras relembrando alguns conceitos importantes:

- Triângulo retângulo: triângulo que possui um ângulo interno com medida igual a 90° (chamado ângulo reto);

- Hipotenusa: lado de um triângulo retângulo que se opõe ao ângulo reto;
- Catetos: lados de um triângulo retângulo que formam o ângulo reto.

Veja a figura:



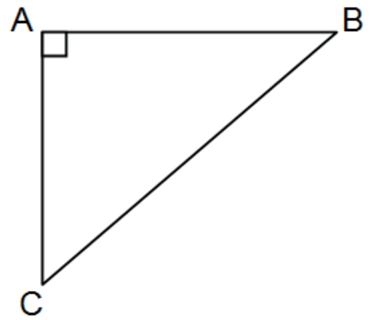
Obs.: ângulo de 90° no vértice A (ângulo reto)

Figura 23
Fonte: autor

Exemplo

Identifique a hipotenusa e os catetos nos seguintes triângulos retângulos:

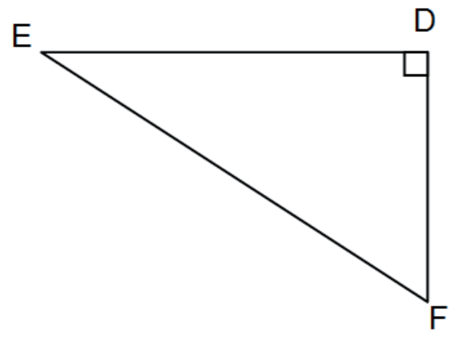
a) resposta: BC = hipotenusa



AB e AC = catetos

Figura 24
Fonte: autor

b) resposta: EF = hipotenusa



DE e DF = catetos

Figura 25
Fonte: autor

c) resposta: HI = hipotenusa

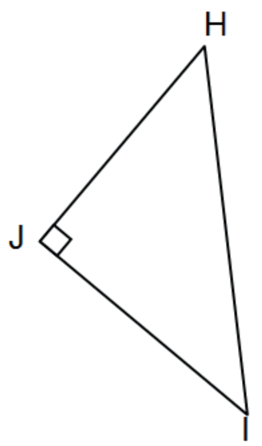
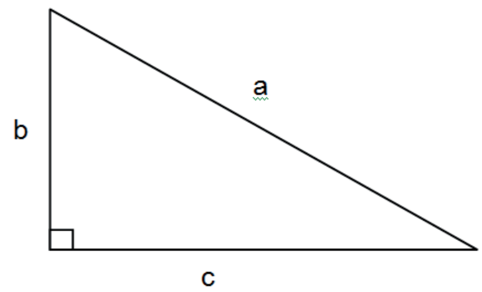


Figura 26
Fonte: autor

Agora que você já observou a hipotenusa e os catetos em um triângulo retângulo, vamos apresentar o Teorema de Pitágoras:

Em todo triângulo retângulo, a soma das medidas dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.



$a^2 = b^2 + c^2$

Figura 27
Fonte: autor

Na figura anterior temos:

a - representa a medida da hipotenusa;

b, c - representam as medidas dos catetos.

Exemplo:

Calcule o valor de "x" aplicando o Teorema de Pitágoras nos seguintes triângulos retângulos:

a)

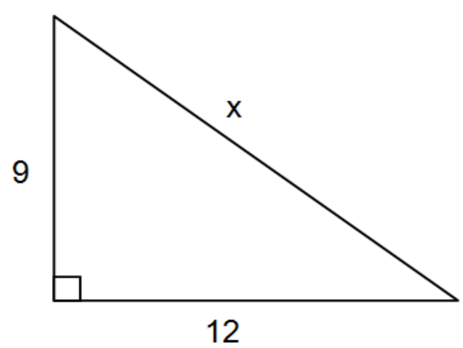


Figura 28
Fonte: autor

Resolução:

$x^2 = 9^2 + 12^2$

$x^2 = 81 + 144$

$x^2 = 225$

$x = \sqrt{225}$

$x = 15$

b)

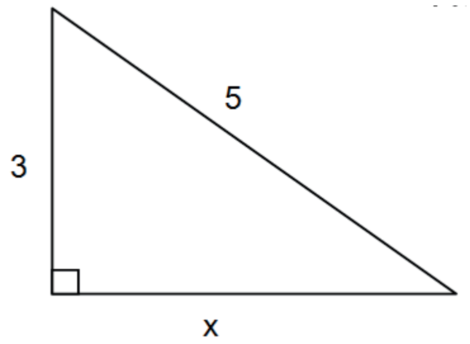


Figura 29
Fonte: autor

Resolução:

$5^2 = x^2 + 3^2$

$25 = x^2 + 9$

$x^2 = 25 - 9$

$x^2 = 16$

$x = \sqrt{16}$

$x = 4$

c)

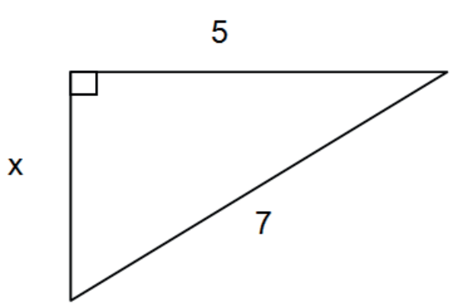


Figura 30
Fonte: autor

Resolução:

$7^2 = 5^2 + x^2$

$49 = 25 + x^2$

$x^2 = 49 - 25$

$x^2 = 24$

$x = \sqrt{24}$ (fatore e simplifique)

$x = 2\sqrt{6}$

6.1.1 Aplicação do teorema de Pitágoras

Agora que já mostramos como utilizar o Teorema de Pitágoras, vamos partir para algumas aplicações como, por exemplo:

a) Diagonal de um quadrado.

Considere um quadrado de vértices ABCD, de lado medindo "l" e de diagonal medindo "d", como mostra a figura a seguir:

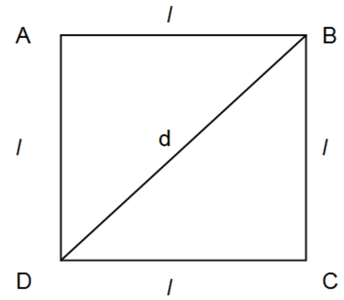


Figura 31
Fonte: autor

Aplicando Pitágoras no ΔBCD, temos:

$d^2 = l^2 + l^2$

$d^2 = 2l^2$

$d = \sqrt{2l^2}$

$$d = l\sqrt{2}$$

b. Altura de um triângulo equilátero.

Considere o triângulo equilátero ABC de lados medindo “l” e de altura medindo “h” . Quando traçamos a altura “h” relativa à base $\overrightarrow{BC}$, dividimos esta em duas partes iguais de medida $\frac{l}{2}$. Veja a figura abaixo:

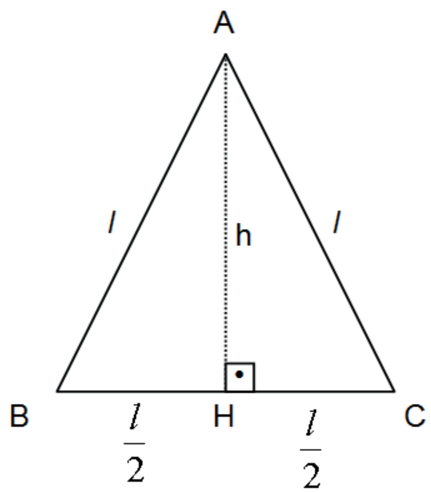


Figura 32
Fonte: autor

Aplicando Pitágoras no ΔAHC , temos:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3l^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Exemplo:

a. Calcule a medida da diagonal de um quadrado de lado medindo 9 cm.

Usando a fórmula da diagonal do quadrado: $d = l\sqrt{2}$, temos:

$$d = 9\sqrt{2} \cong 9 \cdot 1{,}41 \cong 12{,}69\ m$$

b. Encontre a altura do triângulo equilátero de lado medindo 8 cm.

Usando a fórmula da altura do triângulo equilátero: $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, temos:

$$h = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \cong 4 \cdot 1{,}732 \cong 6{,}928\ cm$$

Esses exemplos são apenas algumas aplicações do Teorema de Pitágoras. A seguir vamos ao enunciado do teorema de Tales.

6.2 Teorema de Tales

Matemático e filósofo grego (624 a.C. – 548 a.C), Tales de Mileto é considerado o primeiro homem da história a quem se atribuem descobertas matemáticas especificas. Uma de suas mais importantes contribuições é conhecida como Teorema de Tales, que vamos enunciar a seguir:

Um feixe de retas paralelas interceptadas por duas transversais determinam seguimentos proporcionais.

Veja a figura:

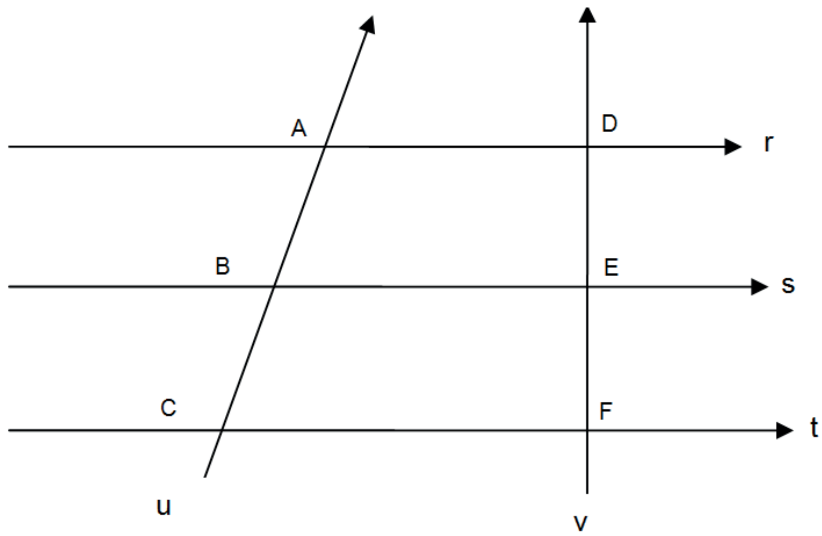


Figura 33
Fonte: autor

Onde "r", "s", "t' são retas paralelas (r // s // t) cortadas pelas retas transversais "u" e "v".

Ou seja,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \quad ou \quad \frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$$

Vamos aplicar o Teorema de Tales para resolver as atividades a seguir:

Considere r//s//t e encontre a medida "x" em cada uma das figuras:

a.

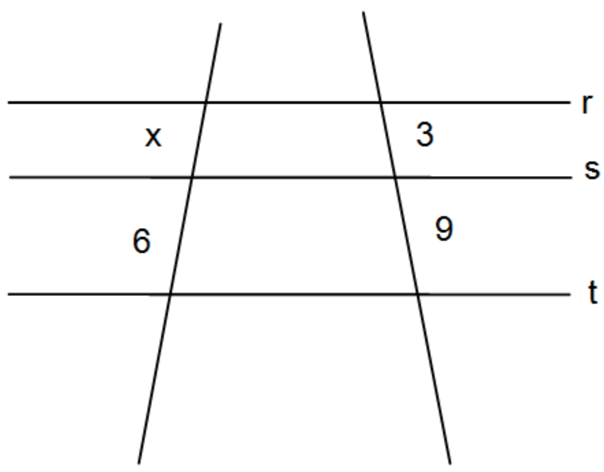


Figura 34
Fonte: autor

Resolução:

$$\frac{x}{6} = \frac{3}{9}$$

$$9x = 3 \cdot 6$$

$$9x = 18$$

$$x = \frac{18}{9}$$

$$x = 2$$

b.

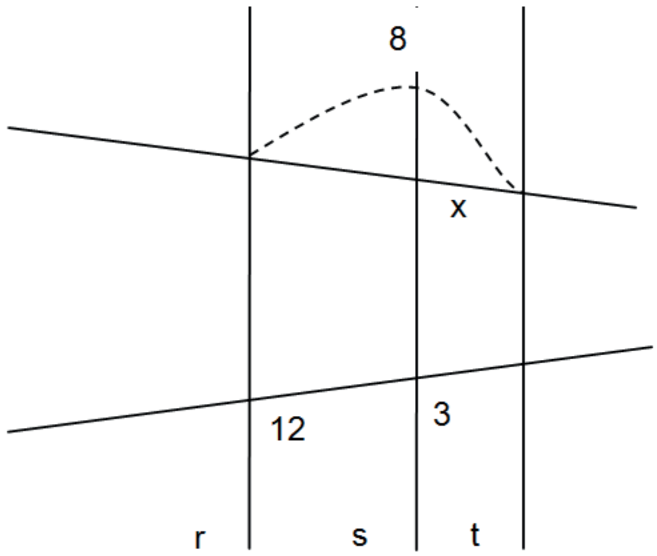


Figura 35
Fonte: autor

$$\frac{x}{8-x} = \frac{3}{12}$$

$$12x = 3 \cdot (8 - x)$$

$$12x = 24 - 3x$$

$$12x + 3x = 24$$

$$15x = 24$$

$$x = \frac{24}{15}$$

$$x = 1{,}6$$

Agora vamos estudar outro conteúdo muito importante: área de figuras planas.

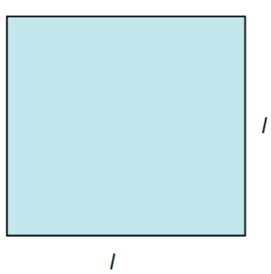
6.3 Área de figuras planas

Neste tópico vamos relembrar as formas geométricas planas mais comuns, seus elementos importantes e as fórmulas para o cálculo de área. Lembramos que medir área de uma superfície significa compará-la com outra superfície adotada como unidade de referência. Logo, quando medimos a área de um galpão, por exemplo, e encontramos $50m^2$, estamos querendo dizer que cabem nessa região 50 "quadradinhos" de 1m por 1m.

Fique atento às figuras e aos elementos que compõem o cálculo da área de cada uma delas.

Vejamos as figuras:

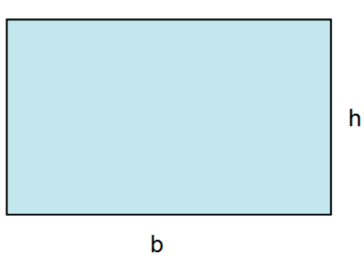
QUADRADO



l = lado

Área = l^2

RETÂNGULO

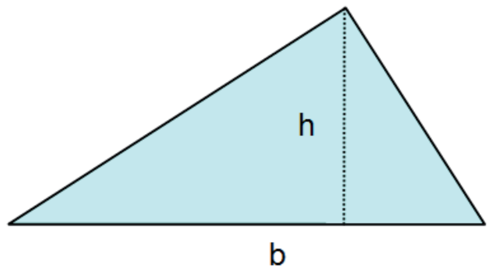


b = base

h = altura

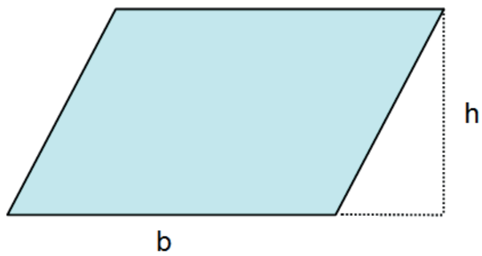
Área = b · h

TRIÂNGULO



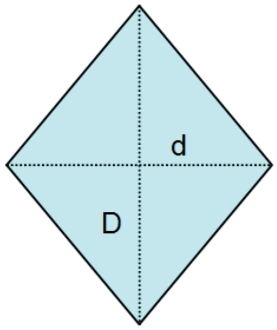
$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2}$$

PARALELOGRAMO



$$\text{Área} = b \cdot h$$

LOSANGO

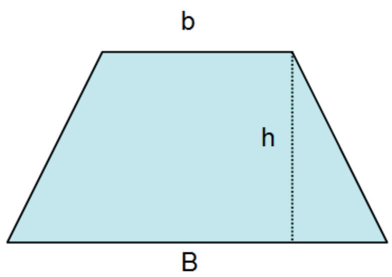


d = diagonal menor

D= Diagonal maior

$$\text{Área} = \frac{d \cdot D}{2}$$

TRAPÉZIO

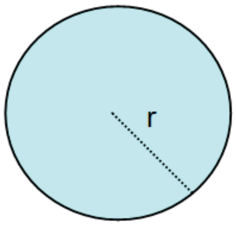


b = base menor

B = base maior

$$\text{Área} = \frac{(b + B)}{2} \cdot h$$

CÍRCULO



Área = $pi \cdot r^2$

Onde pi (π) é aproximadamente 3,141592...

Em nossos cálculo adotamos pi = 3,14.

Exemplos:

1. A sala da casa de Carlos tem formato retangular medindo 3m de comprimento por 2m de largura. Calcule a área da sala.

Resposta: sala retangular, ou seja, $A = 2 \cdot 3 = 6\ m^2$

Procure sempre que possível fazer uma representação gráfica do problema. Ajuda a visualizar e reconhecer seus elementos importantes (base, altura, diagonal, etc.)

2. Calcule a área de um paralelogramo de base 12cm e altura 4cm.

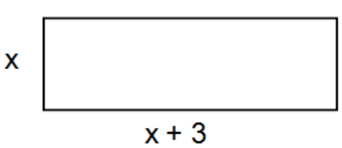
Resposta: $A = 12 \cdot 4 = 48\ cm^2$

3. Determine a área de círculo de raio igual a 4m.

Resposta: $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\ \pi\ cm^2 \cong 16 \cdot 3{,}14 = 50{,}24\ cm^2$

4. A base de um retângulo tem 3 cm a mais que a altura. Determine a área desse retângulo, sabendo que o seu perímetro é 26 cm.

Resposta:



Altura: x   Base: x + 3

Perímetro = soma das medidas dos lados.

Perímetro = 26 cm

$$2 \cdot x + 2 \cdot (x + 3) = 26$$

$$2 \cdot x + 2 \cdot (x + 3) = 26$$

$$2x + 2x + 6 = 26$$

$$4x = 26 - 6$$

$$4x = 20$$

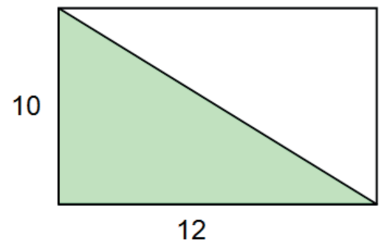
$$x = \frac{20}{4}$$

$$x = 5\ cm\ \ (medida\ da\ altura)$$

Assim, a base terá: x + 3 = 5 + 3 = 8 cm e a área será igual a:

$$\mathbf{A = 8 \cdot 5 = 40cm^2}$$

5. Calcule a área da parte colorida da figura abaixo:



Resposta:

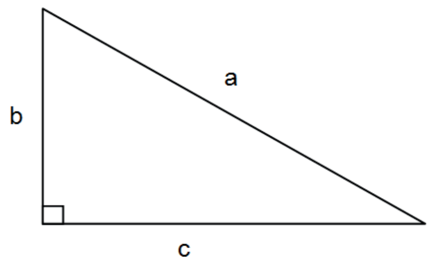
A área da parte colorida corresponde à metade da área do retângulo, já que a diagonal do retângulo o divide em duas partes iguais.

Assim, temos:

$$A_{retângulo} = 10 \cdot 12 = 120 \Rightarrow A_{região} = \frac{A_{retângulo}}{2} = \frac{120}{2} = 60\ unidades^2$$
$$(tal\ processo\ é\ a\ equivalente\ a\ calcular\ a\ área\ do\ triângulo)$$

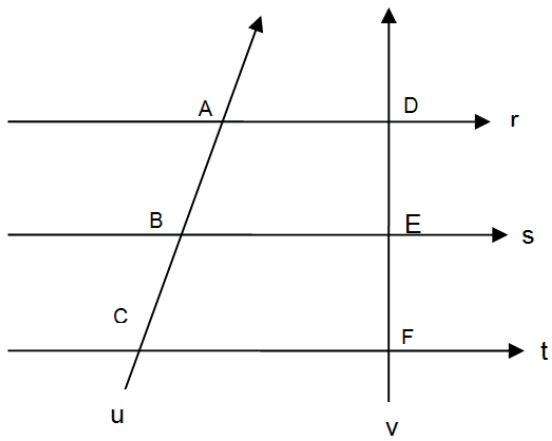
Resumo

Nesta aula você teve a oportunidade de conhecer dois teoremas importantes em matemática. Um deles é o Teorema de Pitágoras, cujo enunciado é "em um triângulo retângulo a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa".



$$a^2 = b^2 + c^2$$

O outro é o Teorema de Tales, cujo enunciado é o seguinte: "Um feixe de retas paralelas interceptadas por duas retas transversais determina segmentos proporcionais".



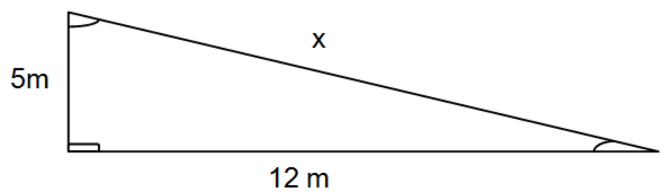
$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \quad ou \quad \frac{AC}{BC} = \frac{DF}{DE}$$

Mostramos também as fórmulas para o calculo da área das Figuras Planas. Espero que você tenha compreendido os enunciados dos Teoremas e suas aplicabilidades na resolução de exercícios, assim como a aplicação das fórmulas no cálculo de áreas das figuras planas. Sugiro que você faça as atividades de aprendizagem. Vamos lá!

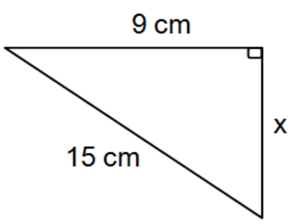
Atividades de aprendizagem

1. Calcule o valor de "x" usando o Teorema de Pitágoras nos seguintes triângulos retângulos:

a)



b)

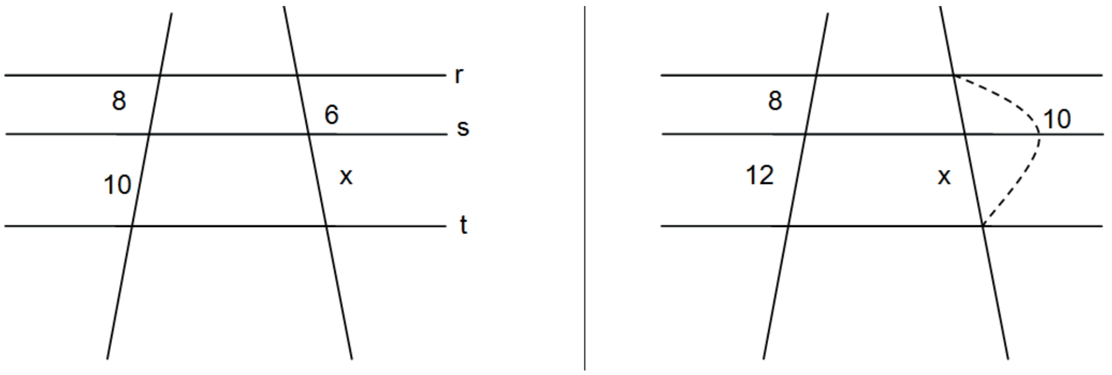


2. Determine o perímetro de um triângulo retângulo cujos catetos medem 12cm e 5cm.

3. Calcule a medida da diagonal de uma quadrado de lado 4 cm.

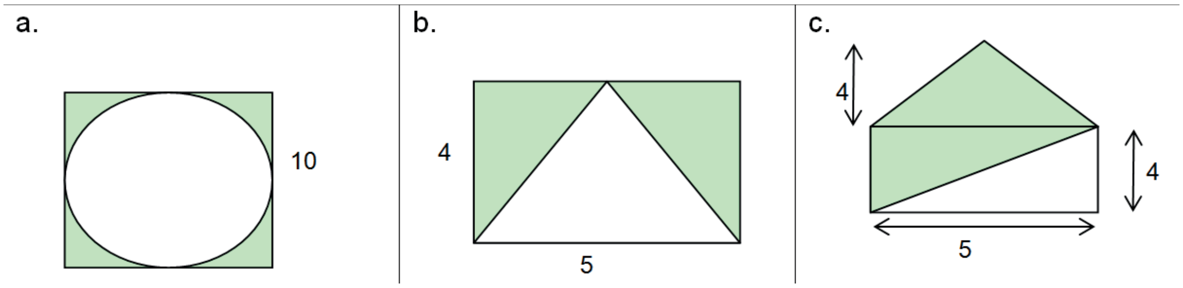
4. Encontre a medida da diagonal de um retângulo de dimensões 9cm e 12cm.

5. Considere r//s//t e encontre a medida "x" em cada figura abaixo:



6. Calcule a área de uma losango de perímetro igual a 20cm e cuja diagonal maior mede 8cm.

7. Nas figuras abaixo, calcule a área da parte colorida (supondo-se os dados numéricos em cm):



Prezado (a) estudante

Você chegou ao final da última aula desta disciplina e nela teve oportunidade de aprender sobre dois importantes teoremas da matemática, o de Pitágoras e o de Tales. Acredito que todas as informações apresentadas neste conteúdo poderão ser de grande auxílio nas tarefas que futuramente estiverem ao seu encargo.

Palavras Finais

Caro (a) estudante,

No decorrer das aulas você pôde relembrar conceitos de Matemática importantes para o desenvolvimento do Curso Técnico em Administração. Espero ter atingido as suas expectativas e que você tenha assimilado todos os conceitos apresentados.

Parabéns pelo seu empenho e dedicação nos estudos, pois estas são características importantes do aluno de um curso na modalidade EaD.

Em cada aula procuramos construir os conceitos e através dos exercícios, num passo a passo, levá-lo (a) a melhor compreender os temas tratados. Fizemos bastante, mas quero lembrar que não esgotamos aqui o estudo da Matemática. Você está superando mais uma etapa de muitas que virão, mas agora com mais experiência.

Espero que continue seus estudos com a mesma disposição com que enfrentou os problemas de Matemática. As aceleradas transformações da atualidade exigem profissionais qualificados e atualizados com novas técnicas e ferramentas utilizados no mercado de trabalho.

Lembre-se que a chave para o sucesso como afirmamos no início da disciplina está em seus estudos e na sua dedicação. Não desista!

Guia de Soluções

Aula 1

1. Calcule o valor das potências:

a) $8^2 = 64$

b) $(-8)^2 = 64$

c) $-8^2 = -64$

d) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$

e) $7^{-2} = \frac{1}{49}$

f) $5^0 = 1$

g) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

2. Aplique as propriedades e reduza a uma só potência:

a) $4^6 \cdot 4^4 = 4^{6+4} = 4^{10}$

b) $10^6 : 10^4 = 10^{6-4} = 10^2$

c) $(t^2)^4 = t^{2 \cdot 4} = t^8$

d) $\frac{x^3}{y^3} = \left(\frac{x}{y}\right)^3$

e) $(3^5)^2 \cdot (3^2)^{-3} = 3^{5 \cdot 2} \cdot 3^{2(-3)} = 3^{10} \cdot 3^{-6} = 3^{10-6} = 3^4$

f) $\frac{5^4 \cdot 5}{5^3} = \frac{5^{4+1}}{5^3} = \frac{5^5}{5^3} = 5^2$

3. Complete a tabela:

Forma decimal	Notação Científica
4.500.000.000	$4{,}5 \cdot 10^9$
0,0000032	$3{,}2 \cdot 10^{-6}$
520.000.000	5,2.108
0,0000023	2,3.10-6

4. Calcule as raízes:

a) $\sqrt[3]{125} = 5$

b) $\sqrt[3]{-125} = -5$

c) $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$

d) $256^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{256^3} = \left(\sqrt[4]{256}\right)^3 = 4^3 = 64$

e) $\sqrt{36} = 6$

f) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

5. Simplifique os radicais:

a) $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = 2\sqrt[3]{5}$

b) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

6. Efetue as seguintes expressões envolvendo radicais:

a) $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = (5 + 2 - 3)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

b) $4\sqrt{2} + 5\sqrt{50} - 3\sqrt{18} =$

$4\sqrt{2} + 5\sqrt{2 \cdot 5^2} - 3\sqrt{2 \cdot 3^2} =$

$4\sqrt{2} + 5 \cdot 5\sqrt{2} - 3 \cdot 3\sqrt{2} =$

$4\sqrt{2} + 25\sqrt{2} - 9\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$

7. O valor de $(0{,}2)^3 + (0{,}16)^2$ é: =

a) 0,0264 b) 0,0336 c) 0,1056 d) 0,2568 e) 0,6256

Resp.: 0,008 + 0,0256 = 0,0336 alternativa b)

Aula 2

1. Determine a razão entre os números 10 e 50.

$$\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

2. Em uma reunião de negócios eram esperadas 10 pessoas, porém 2 não conseguiram participar devido a problemas pessoais. Determine a razão entre o número de participantes e o total de pessoas esperadas para essa reunião.

$$número\ de\ participantes = 10 - 2 = 8$$

$$razão: \quad \frac{número\ de\ participantes}{total\ de\ pessoas} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

3. Calcule 5% de R$ 850,00.

$$5\% = 0{,}05 \ \ (forma\ decimal)$$

$$0{,}05 \cdot 850 = 42{,}5 = R\$\ 42{,}50$$

4. Dentre os 1250 médicos que participam de um congresso, 48% são mulheres. Dentre as mulheres, 9% são pediatras. Quantas mulheres pediatras participaram desse congresso?

$$mulheres = 48\%\ de\ 1250 = 0{,}48 \cdot 1250 = 600\ mulheres$$

$$mulheres\ pediatras = 9\%\ de\ 600 = 0{,}09 \cdot 600 = 54\ mulheres\ pediatras$$

5. O preço de certa mercadoria sofre um reajuste de 15%. Supondo que o preço da mercadoria era de R$ 500,00, calcule o reajuste sofrido.

$$reajuste = 15\%\ de\ 500 = 0{,}15 \cdot 500 = 75 = R\$\ 75{,}00$$

6. Verifique se os seguintes números formam uma proporção:

a. 3, 4, 6 e 8 b. 12, 15, 4 e 3 c. 6, 9, 12 e 27

Respostas:

$$a)\ \frac{3}{4} = \frac{6}{8}\ \ é\ uma\ proporção\ pois\ 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$$

$$b)\ \frac{12}{15} = \frac{4}{3}\ não\ formam\ uma\ porporção\ pois\ 12 \cdot 3 \neq 15 \cdot 4$$

$$c)\ \frac{6}{9} = \frac{12}{27}\ não\ formam\ uma\ proporção\ pois\ 6 \cdot 27 \neq 9 \cdot 12$$

7. Pedro e Marcos trabalham em uma fábrica. Pedro recebe R$ 900,00 ao mês e Marcos recebe R$ 1.200,00. Determine a razão entre os salários de Pedro e de Marcos.

$$razão: \frac{salário\ de\ Pedro}{salário\ de\ Marcos} = \frac{900}{1200} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Aula 3

1. Resolva as seguintes equações do 1° grau dentro do conjunto dos números reais:

a) 5x + 1=36

Resolução

$$5x = 36 - 1$$

$$5x = 35$$

$$x = \frac{35}{5}$$

$$x = 7$$

$$S = \{7\}$$

b) 7x = 4x + 5

Resolução

$$7x - 4x = 5$$

$$3x = 5$$

$$x = \frac{5}{3}$$

$$S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$$

c) 9x – 7 = 5x + 13

Resolução

$9x - 5x = 13 + 7$

$4x = 20$

$x = \frac{20}{4}$

$x = 5$

$S = \{5\}$

d) 2(2x -1) – 6(1 – 2x) = 2 (4x – 5)

Resolução

$4x - 2 - 6 + 12x = 8x - 10$

$4x + 12x - 8x = -10 + 2 + 6$

$8x = -2$

$x = -\frac{2}{8}$

$x = -\frac{1}{4}$

$S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

e) $\frac{3x}{4} - \frac{2}{3} = x - \frac{5}{2}$

Resolução

$mmc(2, 3, 4) = 12$

$12 \cdot \frac{3x}{4} - 12 \cdot \frac{2}{3} = 12 \cdot x - 12 \cdot \frac{5}{2}$

$3 \cdot 3x - 4 \cdot 2 = 12x - 6 \cdot 5$

$9x - 8 = 12x - 30$

$9x - 12x = -30 + 8$

$-3x = -22$

$(obs.: -3\ est\acute{a}multiplicandoxeportando$ "passa" $dividindoN\tilde{A}OMUDADESINAL)$

$$x = \frac{-22}{-3}$$

$$x = \frac{22}{3}$$

$$S = \left\{\frac{22}{3}\right\}$$

2. Exercícios: Sendo $U = \mathbb{R}$, resolva as equações abaixo indicando o seu conjunto solução.

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

Resolução

$a = 1; b = -7; c = 12$ (equação completa, vamos resolver usando Bháskara)

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12$

$\Delta = 49 - 48$

$\Delta = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{7 + 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{7 - 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$S = \{3, 4\}$

b) $6y^2 + y - 1 = 0$

Resolução

$a = 6; b = 1; c = -1$ (equação completa, vamos resolver usando Bháskara)

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$\Delta = (1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)$

$\Delta = 1 + 24$

$\Delta = 25$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 6}$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{12}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-1 - 5}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

$$S = \left\{\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right\}$$

c) $x^2 - 5x = 0$

Resolução

$a = 1; b = -5; c = 0$ (equação incompleta, vamos resolver usando fatoração)

$x \cdot (x - 5) = 0$

$x = 0 \quad ou x - 5 = 0$

$x = 0 \quad ou x = 5$

$S = \{0; 5\}$

d) $5x^2 - 45 = 0$

Resolução

$a = 5; b = 0; c = -45$ (equação incompleta, vamos resolver isolando "x")

$5x^2 = 45$

$x^2 = \frac{45}{5}$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9}$

$x = \pm 3$

$S = \{3; -3\}$

e) $9x^2 - 6x + 5 = 0$

Resolução

$a = 9; b = -6; c = 5$ (equação completa, vamos resolver usando Bháskara)

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 5$

$\Delta = 36 - 180$

$\Delta = -144 \quad (negativo)$

$Como \Delta < 0 \ (negativo)$ (então a equação não admite solução real)

$Assim, \qquad S = \{ \quad \}$(conjunto vazio)

3. Subtraindo 25 de um certo número obtemos 11. Qual é esse número?

Seja x número procurado

$x - 25 = 11$

$x = 11 + 25$

$x = 36$

Resposta: O número é 36

4. Qual o número que adicionado a 15 é igual a 31?

Seja x número procurado

$x + 15 = 31$

$x = 31 - 15$

$x = 16$

Resposta: O número é 16

5. O triplo de um número menos 7 é igual a 80. Qual é esse número?

Seja x número procurado

Triplo do número x = 3x

$3x - 7 = 80$

$3x = 80 + 7$

$3x = 87$

$x = \frac{87}{3}$

$x = 29$

Resposta: O número é 29

6. A soma de dois números é igual a 50. O número maior é o quádruplo do número menor. Calcule os números.

Seja x: o menor número procurado

Assim, o maior número é dado por 4x (quádruplo do menor)

$$4x + x = 50$$

$$5x = 50$$

$$x = \frac{50}{5}$$

$$x = 10$$

Resposta: O menor número é 10 e o maior número é 4 .10 = 40

7. A soma de um número real positivo e o seu quadrado dá 30. Qual é esse número?

Seja x: número real positivo

Quadrado do número real x é dado por x^2, assim temos a equação:

$x + x^2 = 30$ (vamos organizar a equação)

$$x^2 + x - 30 = 0$$

$a = 1; b = 1; c = -30$ (equação completa, vamos resolver usando Bháskara)

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\Delta = (1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)$$

$$\Delta = 1 + 120$$

$$\Delta = 121$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm 11}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 11}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$x_2 = \frac{-1-11}{2} = \frac{-12}{2} = -6$ (não é solução para o problema, pois é negativo)

Resposta: o número é 5.

Aula 4

1. Considere a função do 1º grau h(x) = 4x – 20 e determine:

a) os coeficientes angular e linear;

Coeficiente angular: a = 4

Coeficiente linear: b = -20

b. se a função é crescente ou decrescente;

A função é crescente, pois a = 4 (positivo)

c) h(2);

$$h(x) = 4x - 20$$

$$h(2) = 4 \cdot (2) - 20 = 8 - 20 = -12$$

d) a raiz;

$$h(x) = 4x - 20 = 0$$

$$4x - 20 = 0$$

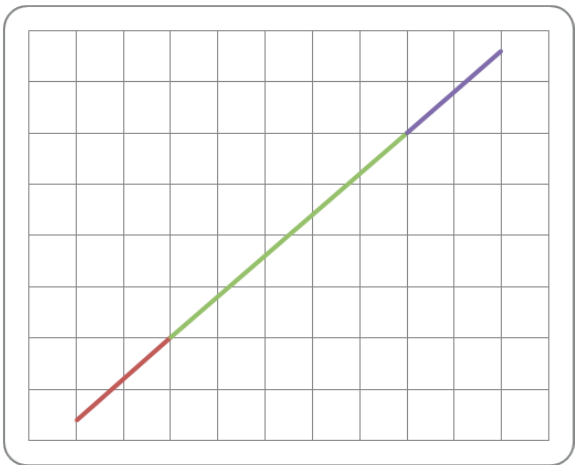
$$4x = 20$$

$$x = \frac{20}{4}$$

$$x = 5$$

e) representação gráfica;

x	h(x) = 4x - 20
0	-20
5	0



2. Com relação à função y = $-x^2 + x + 6$ determine:

a) as raízes;

Resposta:

$$-x^2 + x + 6 = 0$$

$$a = -1, \quad b = 1, \quad c = 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6 = 1 + 24 = 25$$

$$\Delta = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{-2}$$

$$x' = \frac{-1+5}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$x'' = \frac{-1-5}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Raízes: x' = - 2 e x" = 3

b) as coordenadas do vértice;

Resposta:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(1)}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(25)}{4 \cdot (-1)} = \frac{-25}{-4} = \frac{25}{4}$$

Coordenadas do vértice: $x_v = \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad e y_v = \frac{25}{4} = 6{,}25$

c) a concavidade da parábola;

Resposta:

Concavidade voltada para baixo, pois coeficiente a = -1 (negativo).

d) se o vértice é ponto de máximo ou mínimo;

Resposta:

O vértice é um ponto de máximo da função (concavidade voltada para baixo)

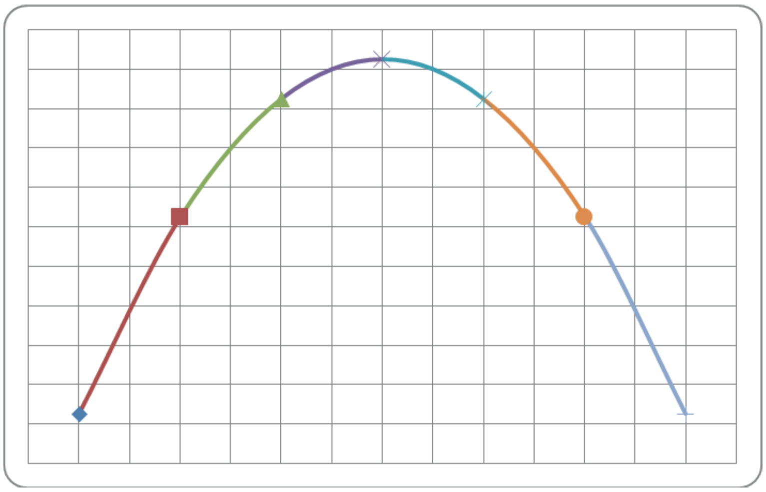
e) a intersecção da parábola com o eixo y;

Resposta:

A parábola intercepta o eixo y no ponto (0, c) = (0, 6)

f) faça um esboço do gráfico.

x	$y = -x^2 + x + 6$
-2,5	-2,75
-1,5	2,25
-0,5	5,25
0,5	6,25 (vértice)
1,5	5,25
2,5	2,25
3,5	-2,75



3. Na produção de um determinado objeto uma empresa gastou R$ 400,00 com o molde da peça e mais R$ 2,00 por peça produzida. Nessa situação determine:

a) Chamando de "x" o número de peças produzidas e "C(x)" a função custo, encontre "C(x)";

Resposta:

$C(x) = 400 + 2x$

b) Calcule o custo para produzir 300 peças.

Reposta:

$C(300) = 400 + 2.(300) = 400 + 600 = 1.000$ reais

4. Sabe-se que, sob certo ângulo de tiro a altura atingida por uma bala, em metros, em função do tempo, em segundos, é dada por $h(t) = -20t^2 + 200t$.

Nessa situação, pergunta-se:

a) Qual a altura máxima atingida pela bala?

Resposta:

O ponto mais alto atingido pela bala é igual ao vértice. Sendo assim, a altura

máxima atingida pela bala é igual a componente yv. $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (200)^2 - 4.(-20).0 = 40.000$

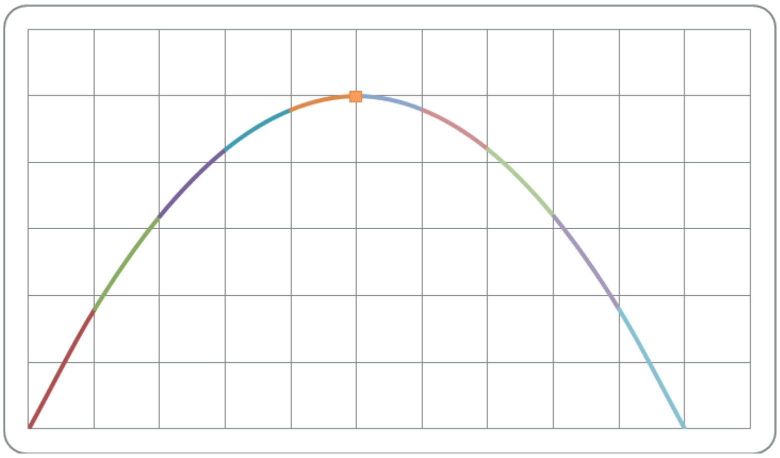
$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-40.000}{4.(-20)} = \frac{-40.000}{-80} = 500\ m$$

b) Em quanto tempo após o tiro a bala atinge a altura máxima?

Resposta:

O tempo em que a bala atinge a altura máxima é igual a componente x_v.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(200)}{2.(-20)} = \frac{-200}{-40} = 5\ segundos$$



Aula 5

1. Classifique as seguintes funções exponenciais em crescente ou decrescente:

a) $y = 5^x$: Resposta: Crescente

b) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$: Resposta: Decrescente

2. Resolva as equações exponenciais:

a) $64^x = 256$

$Resposta: \quad 64 = 2^6 e \quad 256 = 2^8$

$2^{6x} = 2^8$ (bases iguais)

$6x = 8$

$x = \frac{8}{6}$

$x = \frac{4}{3}$

b) $9^{(2x-1)} = 27^{(x+1)}$

$Resposta: \ 9 = 3^2 e \quad 27 = 3^3$

$3^{2(2x-1)} = 3^{3(x+1)}$ (bases iguais)

$2(2x-1) = 3(x+1)$

$4x - 2 = 3x + 3$

$4x - 3x = 3 + 2$

$x = 5$

3. O número de bactérias de uma cultura, "t" horas após o início de certo experimento é dado pela expressão N(t) = 800 · $3^{0,5t}$. Nessas condições, determine:

a) A população inicial de bactérias (t = 0);

$Resposta: \ N(0) = 800 \cdot 3^{0,5 \cdot 0} = 800 \cdot 3^0 = 800 \cdot 1 = 800 \ bactérias$

b) A população de bactérias após 2 horas de experimento;

$Resposta: N(2) = 800 \cdot 3^{0,5 \cdot 2} = 800 \cdot 3^1 = 800 \cdot 3 = 2400\ bactérias$

c) Quanto tempo após o início do experimento a cultura terá 64.800 bactérias?

$Resposta: N(t) = 800 \cdot 3^{0,5t} = 64800$

$800 \cdot 3^{0,5t} = 64800$

$3^{0,5t} = \frac{64800}{800}$

$3^{0,5t} = 81 \quad (lembrse - se \quad 81 = 3^4)$

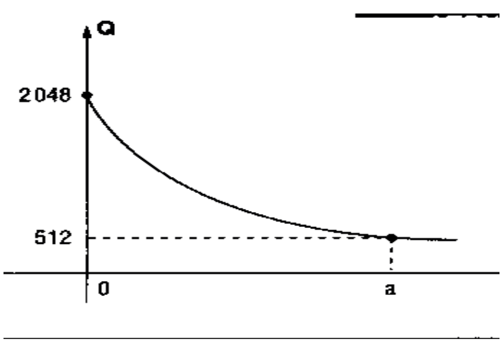
$3^{0,5t} = 3^4$ (bases iguais)

$0,5t = 4$

$t = \frac{4}{0,5}$

$t = 8\ horas$

4. Uma substância se decompõe aproximadamente segundo a lei , em que "k" é uma constante, "t" indica o tempo (em minutos) e "Q(t)" indica a quantidade de substância (em gramas) no instante "t".



Considerando-se os dados desse processo de decomposição mostrados no gráfico, determine os valores de "k" e de "a".

Resposta: Quando t = 0, então Q(t) = 2048, assim temos:

$Q(t) = k \cdot 2^{-0,5t}$

$$Q(0) = k \cdot 2^{-0,5.0} = 2048$$

$$k \cdot 2^0 = 2048$$

$$k \cdot 1 = 2048$$

$$k = 2048$$

Assim Q(t) = 2048 · $2^{-0,5t}$

$$Q(a) = 512$$

$$2048 \cdot 2^{-0,5t} = 512$$

$$2^{-0,5t} = \frac{512}{2048}$$

$$2^{-0,5t} = \frac{1}{4}$$

$$2^{-0,5t} = \frac{1}{2^2}$$

$2^{-0,5t} = 2^{-2}$ (bases iguais)

$$-0,5t = -2$$

$$0,5t = 2$$

$$t = \frac{2}{0,5}$$

$$t = 4\ minutos$$

5. Classifique as seguintes funções logarítmicas em crescente ou decrescente:

a) $y = \log_5 x$ Resposta: Função Crescente

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}(x+5)$ Resposta: Função Decrescente

6. Calcule os logaritmos:

a) $\log_{25} 625$

Resposta:

$\log_{25} 625 = x \Leftrightarrow 25^x = 625 \quad \Rightarrow 5^{2x} = 5^4 \Rightarrow \quad 2x = 4$

$x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2$

Obs.: lembre-se de que $25 = 5^2 e \ 625 = 5^4$

Então, $\log_{25} 625 = 2$

b) $\log_9 \left(\frac{1}{243}\right)$

Resposta:

$\log_9 \left(\frac{1}{243}\right) = x \Leftrightarrow 9^x = \frac{1}{243} \Rightarrow 3^{2x} = 243^{-1} \Rightarrow 3^{2x} = (3^5)^{-1} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{-5} \Rightarrow \quad 2x = -5 \quad \Rightarrow x = \frac{-5}{2} \Rightarrow x = -2{,}5$

Obs.: lembre-se da potência de expoente negativo (unidade 1).

Então, $\log_9 \left(\frac{1}{243}\right) = -2{,}5$

7. Sendo $\log 5 = 0{,}69 \ e \log 3 = 0{,}47 \quad calcule:$

a) $\log 15$

Resposta: decompondo 15 em fatores primos, temos: 15 = 3 · 5

$\log 15 = \log(3 \cdot 5) \xRightarrow{propr.c} \log 15 = \log 3 + \log 5$

$\log 15 = 0{,}47 + 0{,}69 = 1{,}16$

$\log 15 = 1{,}16$

b) $\log 75$

Resposta: decompondo 75 em fatores primos, temos: 75 = 3 · 5^2

$\log 75 = \log(3 \cdot 5^2) \xRightarrow{propr.c} \log 75 = \log 3 + \log 5^2 \xRightarrow{propr.e} \log 75 = \log 3 + 2 \cdot \log 5$

$\log 75 = 0{,}47 + 2 \cdot 0{,}69 = 0{,}47 + 1{,}38 = 1{,}85$

$\log 75 = 1{,}85$

8. Resolva a equação logarítmica

Resposta: CE. 6x - 9 > 0 $\Rightarrow$ 6x > 9 $\Rightarrow$ x > 9/6 $\Rightarrow$ x >3/2

$$\log_3(6x-9) = 4 \Leftrightarrow 6x-9 = 3^4 \Rightarrow 6x-9 = 81$$

$$6x = 81+9$$

$$6x = 90$$

$$x = \frac{90}{6}$$

$$x = 15$$

$$comox = 15 > \frac{3}{2}(CE), \qquad então$$

$$S = \{ 15 \}$$

9. A fórmula para o cálculo do Montante "M" de um capital "C" aplicado em um período "n" (dias, meses, anos,...) a uma taxa "i" por unidade de tempo é dada por M = C $\cdot(1+i)^n$, como visto no exemplo 2 (função exponencial). Encontre o tempo que um capital inicial de R$ 10.000,00 deve ser aplicado para se obter um montante de R$ 13.400,00 a uma taxa de 5% ao mês. (dados: log 1,34 = 0,12 e log 1,05 = 0,02)

Resposta:

Dados: Capital: C = 10.000,00

Taxa: i = 5% = 0,05

Montante: M = 13.400,00

Período: t

$$M = C \cdot (1+i)^t$$

$$10000 \cdot (1+0{,}05)^t = 13400{,}00$$

$$(1{,}05)^t = \frac{13400{,}00}{10000}$$

$(1{,}05)^t = 1{,}34$ (para resolver a equação, aplicamos log nos dois membros da equação)

$\log(1{,}05)^t = \log 1{,}34$ (utilizamos a propriedade (b) dos logaritmos)

$t \cdot \log(1{,}05) = \log 1{,}34$

$t = \frac{\log 1{,}34}{\log 1{,}05}$

$t = \frac{0{,}12}{0{,}02}$

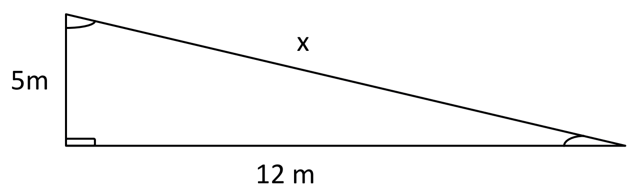
$t = 6\ meses$

Resp.: a aplicação deve ser feita por um período de 6 meses.

Aula 6

1. Calcule o valor de "x" usando o Teorema de Pitágoras nos seguintes triângulos retângulos:

a)



Resolução: $x^2 = 5^2 + 12^2$

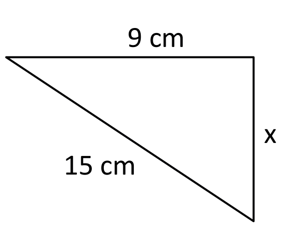
$x^2 = 25 + 144$

$x^2 = 169$

$x = \sqrt{169}$

$x = 13$

b)



Resolução: $15^2 = x^2 + 9^2$

$225 = x^2 + 81$

$x^2 = 225 - 81$

$x^2 = 144$

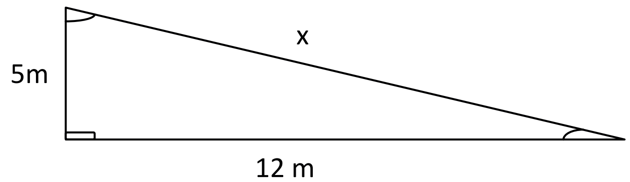
$x = \sqrt{144}$

$x = 12$

2. Determine o perímetro de um triângulo retângulo cujos catetos medem 12cm e 5cm.

Resolução:

Lembre-se: o perímetro de um polígono é dado pela soma das medidas de seus lados. Assim, temos uma situação semelhante ao exercício 1.a)



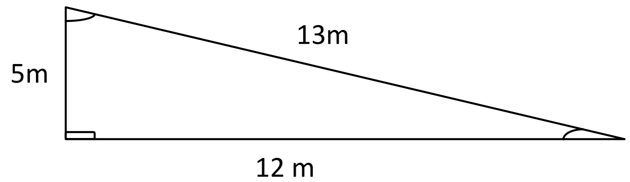
$x^2 = 5^2 + 12^2$

$x^2 = 25 + 144$

$x^2 = 169$

$x = \sqrt{169}$

$x = 13$ (hipotenusa)



Portanto seu perímetro será: 5m + 12m + 13m = 30m.

3. Calcule a medida da diagonal de uma quadrado de lado 4 cm.

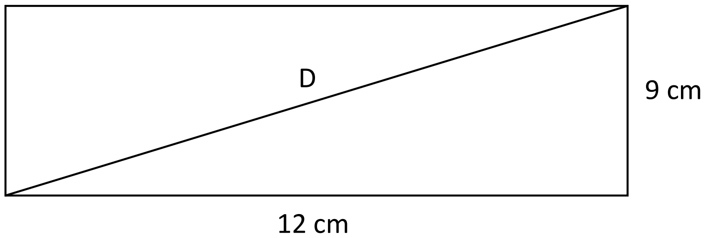
Resolução:

Usando a fórmula da diagonal do quadrado: $\boldsymbol{d = l\sqrt{2}}$, temos:

$d = 4\sqrt{2} \cong 4 \cdot 1{,}41 \cong 5{,}64\ cm$

4. Encontre a medida da diagonal de um retângulo de dimensões 9cm e 12cm.

Resolução:



Assim, temos:

$D^2 = 9^2 + 12^2$

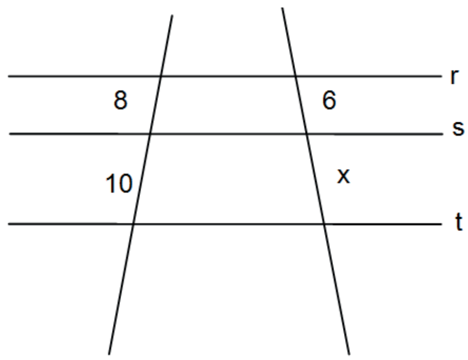
$D^2 = 81 + 144$

$D^2 = 225$

$D = \sqrt{225}$

$D = 15$ (diagonal do retângulo)

5. Considere r//s//t e encontre a medida "x" em cada figura abaixo:



Resolução:

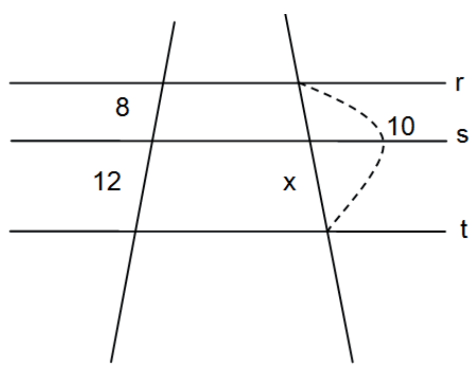
$$\frac{8}{10} = \frac{6}{x}$$

$$8x = 6 \cdot 10$$

$$8x = 60$$

$$x = \frac{60}{8}$$

$$x = 7{,}5$$



Resolução:

$$\frac{8}{12} = \frac{10 - x}{x}$$

$$8x = 12 \cdot (10 - x)$$

$$8x = 120 - 12x$$

$$8x + 12x = 120$$

$20x = 120$

$x = \frac{120}{20}$

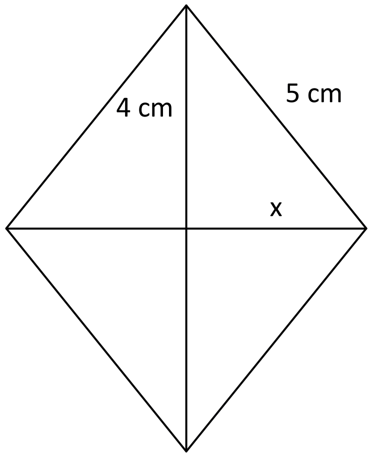
$x = 6$

6. Calcule a área de uma losango de perímetro igual a 20cm e cuja diagonal maior mede 8cm.

Resposta:

Para calcular a área do losango precisamos das medidas das diagonais. (Diagonal maior e diagonal menor). Como perímetro é igual a 20 cm, então cada lado do losango mede 5 cm (20/4).

A diagonal maior mede 8 cm, então metade da diagonal maior mede 4 cm. Assim, temos:



Por Pitágoras, encontramos a medida da metade da diagonal menor:

$x^2 + 4^2 = 5^2$

$x^2 + 16 = 25$

$x^2 = 25 - 16$

$x^2 = 9$

$x = \sqrt{9}$

$x = 3\ cm$

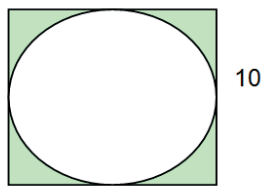
Assim, a diagonal menor mede 6 cm (3 · 2).

Com isso, temos que a área do losango é:

$$A = \frac{d \cdot D}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = \frac{48}{2} = 24\ cm^2$$

7. Nas figuras abaixo, calcule a área da parte colorida (supondo-se os dados numéricos em cm):

a.



Resposta:

Temos um círculo inscrito em um quadrado de lado 10. Então a medida do raio do círculo é 5.

A área da região colorida é igual à área do quadrado menos a área do círculo.

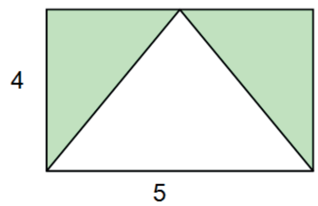
$A_{quadrado} = 10 \cdot 10 = 100\ cm^2$

$A_{círculo} = pi \cdot r^2 = 3{,}14.5^2 = 3{,}14 \cdot 25 = 78{,}5\ cm^2$

Assim:

$A_{região} = 100 - 78{,}5 = 21{,}5\ cm^2$

b.



Resposta:

Temos um retângulo de base 5 cm e altura 4 cm.

A área da região colorida é igual à área do retângulo menos a área do triângulo de base 5 cm e altura 4 cm.

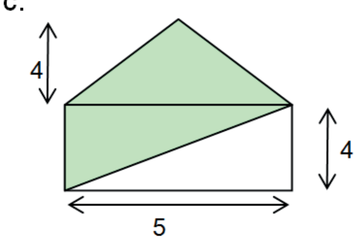
$A_{retângulo} = 5 . 4 = 20\ cm^2$

$A_{triângulo} = (5.4)/2 = 10\ cm^2$

Assim:

$A_{região} = 20 - 10 = 10 \text{ cm}^2$

c.



Resposta:

Temos um retângulo de base 5 cm e altura 4 cm e um triângulo de base 5cm e altura 4 cm.

A área da região colorida é igual à metade da área do retângulo mais a área do triângulo.

$A_{retângulo} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ cm}^2$

$A_{triângulo} = (5 \cdot 4)/2 = 10 \text{ cm}^2$

Assim:

$A_{região} = 20/2 + 10 = 20 \text{ cm}^2$

Referências

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade.** São Paulo: Atual, 2009. Ensino Fundamental – Coleção 6º, 7º, 8º, 9º ano.

YOUSSEF, Antonio Nicolau; SOARES, Elisabeth; FERNANDES, Vicente Paz. **Matemática**. São Paulo: Scipione, 2008. Volume Único.

DANTE, Luís Roberto. **Matemática** – Contexto e Aplicações. São Paulo: Ática, 2003. 3V.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. Coleção Base. São Paulo: Moderna, 1999. Volume único.

Bibliografia Básica

MUROLO, Afrânio. **Matemática aplicada a Administração, Economia e Contabilidade**. São Paulo: Thomson Pioneira, 2004.

SILVA, Sebastião Medeiros. **Matemática básica para cursos superiores.** São Paulo: Atlas, 2006.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR, José Ruy. **Matemática Fundamental** – Uma nova abordagem. São Paulo: FTD, 2002. Volume único.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática Ensino Médio**. São Paulo: Saraiva, 2005. 3V.

BARRETO FILHO, Benigno; SILVA, Cláudio Xavier da. **Matemática Aula por Aula**. São Paulo: FTD, 2003. 3V.

Currículo do Professor-autor

Luis Américo Monteiro Junior é graduado em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos – UFSCar (1991), fez especialização em Ciência da Computação pela Universidade Federal de São Carlos – UFSCar (1993), especialização em Gestão Educacional pelo Centro Universitário Claretiano (2007) na modalidade EAD e mestre em Engenharia Civil - Hidráulica pela Universidade de São Paulo - USP (1998).

Foi professor de Matemática da Rede Pública do Estado de São Paulo durante 15 anos e atualmente é professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – Campus Caraguatatuba onde leciona disciplinas do curso de Licenciatura Plena em Matemática e Professor Assistente 1 da Fatec – São Sebastião onde leciona Matemática Básica e Matemática Financeira para o curso de Gestão Empresarial e Tópicos de Matemática para o curso de Gestão Portuária. Também atua como Tutor Virtual da disciplina Projeto Integrado e é Professor Formador das disciplinas Matemática Básica e Estatística do curso Técnico em Administração na modalidade EAD.